GEMEINVERSTÄNDLICHE ANLEITUNG ZUR RECHNUNG MIT DECIMALBRÜCHEN

Leopold Carl Schulz von Strassnicki

Digitized by Google

Digitized by Google

46487-B.

Digitized by Google

Digitized by Google

Gemeinverständliche Anleitung

zur

Rechnung in Decimalbrüchen.

Von

Dr. L. C. Schulz v. Straßnitzki,
ö. ord. Professor der Mathematik am k. k. polytechnischen Institute.

Wien.
Carl Gerold.
1848.

Digitized by Google

Digitized by Google

Decimalrechnung.

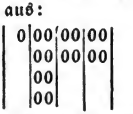
Eine merkwürdige Erscheinung des menschlichen Lebens ist es, daß man gegen die größten Wohlthaten, wenn man von Jugend auf und durch täglichen Gebrauch daran gewöhnt ist, ganz gleichgiltig wird; diese Gleichgiltigkeit erscheint dann am sonderbarsten, wenn sie sich auf Gegenstände bezieht, die sich das Menschengeschlecht erst nach jahrhundertlangen Bestrebungen erworben hat. Eine solche Errungenschaft ist die gegenwärtige Art, Zahlen zu schreiben und mit ihnen zu rechnen, die den Griechen und Römern völlig unbekannt war. Nach meinem Dafürhalten ergibt sich die klarste Einsicht in unser Zahlensystem (und diese ist die Grundlage der Rechnung mit Decimalbrüchen) und den üblichen Rechnungsmechanismus aus der Kenntniß der Entstehung derselben. Es wäre sehr zu wünschen, daß man beim Rechenunterrichte auf die stufenweise Entwickelung des Zahlensystems gehörig Rücksicht nehmen würde, damit das Rechnen nicht in einen geistlosen Mechanismus ausarte. Es handelt sich hier durchaus nicht von der Figur unserer Zahlzeichen, sondern von der Methode, größere Zahlen mit Hilfe von nur wenig Zahlzeichen auszudrücken.

Da es dem Gedächtnisse zu viel wäre, alle Zahlen durch Laut und Zeichen auszudrücken, so waren schon die ersten Menschen bedacht, Ruhepunkte des Zählens zu wählen, auf die sie sich beim weiteren Zählen wieder bezogen. Nach der Einrichtung unserer Hände, dem nächsten Zählapparate, waren diese Ruhepunkte bei fünf und zehen. So ist das römische Zahlzeichen für fünf V die ausgespannte Hand, wo die Finger an einander geschlossen sind; das Zeichen X ist nichts anderes, als die Verdopplung von V, das eine in aufrechter, das andere in verkehrter Stellung, nämlich $\overset{V}{\wedge}$; das Zeichen für fünfzig L ist die Hand in einer anderen Stellung. Diese immerwährende Rücksichtsnahme bei den römischen Zahlzeichen auf 5, 50, 500 ist die Ursache, daß sie nicht auf unser gegenwärtiges Zahlensystem gekommen sind. In der Lautsprache haben alle Völker die Zehnereintheilung festgehalten, nur wenige zählten nach Abtheilungen von 20, die nämlich Hände und Füße zu Hilfe nahmen. So zählt man im Deutschen bis zehn, von zehn fängt man wieder mit eins an, denn eilf zusammengezogen aus ein-lif, bedeutet eins und das Uebrige, zwölf so viel wie zwei-lif, dreizehn,

Digitized by Google

drei und zehn u. ſ. w.; zwanzig bedeutet zweimal zehn, denn die alte Sylbe zig bedeutet zehn. Hundert ſtammt vom altgothiſchen hund, welches urſprünglich zehen hieß, her; im Althochdeutſchen ſagte man zehenzig ſtatt Hundert. Tauſend (thusund taihuns hund) zehnmalhundert. Million iſt erſt in neueren Zeiten entſtanden, das Wort ſtammt aus dem Italieniſchen, und heißt eigentlich ein großes Tauſend; unſere Altväter ſagten immer tauſendmaltauſend ſtatt einer Million.

Auch im wirklichen Rechnen wurde das Zehnerſyſtem ſtets befolgt; Römer und Griechen hatten Rechenbrete durch parallele Linien in Streifen abgetheilt, ein Steinchen (calculus, daher das lateiniſche calculare, Rechnen) bedeutete im erſten Streifen rechts Einheiten, im zweiten Zehner, im dritten Hunderte u. ſ. w. Dieſer Rechenbreter bediente man ſich in Deutſchland bis ins ſechzehnte Jahrhundert, und noch jetzt kennen wenige Bauern in Rußland ein anderes Rechnungsmittel. Um nur ein Beiſpiel zu geben, ſieht die Jahreszahl 1844 auf einem ſolchen Rechenbrete folgendermaßen aus:



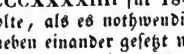
Hätte man bei den Zahlzeichen die Eintheilung nach zehn ſo feſtgehalten, wie in der Tonſprache, ſo wäre unſer Zahlenſyſtem viel früher entſtanden; hätten die Römer keine eigenen Zeichen für fünf, fünfzig, fünfhundert gewählt, ſo wären ſie gerade zu unſerer Zahlenſchrift gelangt, deren Urſprung mit hiſtoriſcher Gewißheit in Indien zu ſuchen iſt.

Da es hier durchaus nicht auf die Figur der Zahlzeichen ankommt, ſo wollen wir die römiſchen Zahlzeichen für diejenigen wählen, die in Indien urſprünglich dafür angewandt wurden; man ſchrieb ſonach urſprünglich MCCCCCCCCXXXXIIII für 1844, indem man jedes Zahlzeichen ſo oft wiederholte, als es nothwendig war, und erſt wenn ein Zahlzeichen zehnmal neben einander geſetzt werden ſollte, wählte man ein neues Zahlzeichen, ſo X für zehnmal I, C für zehnmal X, M für zehnmal C.

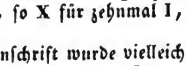
Dieſe Art Zahlenſchrift wurde vielleicht durch Jahrhunderte fortgeſetzt, bis vielleicht Einem der gute Gedanke kam, ſtatt das Zahlzeichen ſelbſt immer zu wiederholen, die Zahl oben anzuſchreiben, wie oft dieſes Zahlzeichen wiederholt werden ſoll, z. B.:

M CCCCCCCC XXXX IIII

ſchrieb man



oder, indem ich mich für die oberen Zahlen der ſogenannten arabiſchen Ziffern bediene:



Digitized by Google

Diese verbesserte Art, Zahlen zu schreiben, wurde wieder durch lange Zeit angewandt, bis man fand, es sey doch überflüssig, immer die Zeichen I, X, C, M unten anzuschreiben, da ja doch die letzte Ziffer immer Einheiten, die vorletzte Zehner, die vorvorletzte Hunderter u. s. w. bedeute; nur Eine Schwierigkeit stand hier im Wege, wenn eines dieser Zahlzeichen gar nicht vorkam, z. B.:

$$\overset{4\,3\,7}{\mathrm{MCI}} = 4307,$$

$$\overset{5\,2\,3}{\mathrm{MXI}} = 5023,$$

$$\overset{8\,2}{\mathrm{MX}} = 8020.$$

Würde man hier das untere Zeichen ohne weiters weglassen, so würde man 4307 mit 437, 5023 mit 523, 8020 mit 82 verwechseln, und so in die größten Irrthümer verfallen. Dieser Schritt der Vervollkommnung erforderte daher ein neues Zeichen, um einen leeren Platz anzudeuten; dazu wurde ein unausgefüllter Kreis (arabisch sifron, siron) gewählt, d. i. unser Null. Im Englischen hat sich cypher noch in der Bedeutung Null erhalten, da sonst in den abendländischen Sprachen, welche zero (siron) für Null gebrauchen, Ziffer nur ein Zahlzeichen im Allgemeinen bedeutet.

Nach Einführung dieses Nullzeichens war jede Schwierigkeit gehoben, und um

$$\overset{4\,3\,0\,7}{\mathrm{MCXI}} \qquad \overset{5\,0\,2\,3}{\mathrm{MCXI}} \qquad \overset{8\,0\,2\,0}{\mathrm{MCXI}}$$

zu schreiben, konnte man ungehindert die unteren Zeichen weglassen, ohne ein Mißverständniß zu befürchten. So entstand eine der herrlichsten Erfindungen des menschlichen Verstandes. Nach Alexander von Humboldt's Untersuchungen befinden sich in den noch vorhandenen verschiedenen schriftlichen Denkmahlen Indiens Zahlenschriften nach den verschiedenen Perioden der Verbesserung, aus welchen hervorgeht, wie lange es immer gebraucht hat, bis man um einen Schritt vorwärts kam. Die Zeitpunkte lassen sich nicht mit Bestimmtheit angeben; von den Indiern überkamen die Araber diese Zahlenschrift, daher wir noch unsere Zahlzeichen arabische Ziffern nennen, obwohl sie ihren Urbildern gar nicht mehr ähnlich sehen. Von den Arabern kamen sie durch Nordafrika zu den Mauren nach Spanien, wo sie Gerbert, der nachmalige Papst Sylvester II., im Jahre 999 kennen lernte, und ihre Kenntniß ins Abendland brachte. Es dauerte aber wieder Jahrhunderte, bis sie Gemeingut selbst der minder Gebildeten wurden, denn noch im sechzehnten Jahrhunderte pflegte man die Rechnungen mit Rechenpfennigen auf Linien und Rechenbretern auszuführen.

Zu Ende des sechzehnten Jahrhunderts wurde endlich der letzte Schritt der Vervollkommnung gemacht (Stifel in Deutschland, Stevin in Niederland, Bombelli in Italien); man setzte das Zahlensystem unter die Einheit hinab fort. Da, wenn man von der Linken gegen die Rechte geht, jede Stelle den zehnten Theil der vorhergehen-

Digitized by Google

den bedeutet, z. B.: 777, wo der zweite 7ner nur den zehnten Theil deſſen bedeutet, was der erſte 7ner links bedeutet, eben ſo der dritte 7ner nur den zehnten Theil deſſen anzeigt, was der ihm vorausgehende werth iſt, ſo ſetzte man dieſes nun weiter fort, ſo z. B.: 777·777, wo hier der Punkt die Stelle der Einheit andeutet; da nun der 7ner vor dieſem Punkte 7 Einheiten bedeutet, ſo muß der erſte 7ner nach dem Punkte $^7/_{10}$, der zweite 7ner nach dem Punkte nur den zehnten Theil des vorhergehenden, daher $^7/_{100}$, der letzte daher $^7/_{1000}$ anzeigen. Der Werth alſo der erſten Stelle nach dem Punkte iſt $^1/_{10}$, der zweiten $^1/_{100}$, der dritten $^1/_{1000}$, u. ſ. w.

Ich glaubte, dieſe hiſtoriſche Skizze deßwegen vorausſchicken zu müſſen, um die Leſer auf den leitenden Hauptgedanken unſeres Zahlenſyſtems aufmerkſam zu machen, der darin beſteht, *jede Ziffer an den Platz zu ſchreiben, der ihr vermöge ihres Ranges gebührt.* Der Rang einer Ziffer ergibt ſich eben wieder aus der Stelle, die ſie einnimmt; ſo lange man es bloß mit ganzen Zahlen zu thun hat, iſt die letzte Stelle rechts die der Einheiten, die vorhergehende die der Zehner, die nächſtvorhergehende die der Hunderter, u. ſ. w. Die Null dient nur dazu, um das Vorhandenſeyn eines Platzes zu zeigen, an dem keine Ziffer ſteht; um z. B. Siebenhundert zu ſchreiben, muß die 7 an die dritte Stelle links kommen, da nun weiter von keinen Zehnern und Einheiten die Rede iſt, ſo müſſen die Plätze der Zehner und Einheiten mit Nullen ausgefüllt werden, und wir haben 700. Sobald man aber das Zahlenſyſtem über die Einheitsſtelle rechts fortſetzt, und die nächſte Stelle Zehntel, die folgenden Hundertel, Tauſendtel, Zehntauſendtel, Hunderttauſendtel, Milliontel u. ſ. w. benennt, ſo drückt begreiflichermaßen die letzte Stelle rechts nicht mehr die der Einheiten aus, und es iſt ein Zeichen nothwendig, an dem ich die Stelle der Einheiten erkenne; dafür wählten viele einen Beiſtrich nach der Einheitsſtelle, wir wollen aber nach dem Muſter der praktiſchen Engländer lieber rechts oben nach der Einheitsſtelle einen Punkt machen, damit wir bei großen Zahlen, wo der Beiſtrich unten die Stelle der Millionen andeutet, Mißverſtändniſſen ausweichen.

Die Zahl 46,345, oder beſſer 46·345 wird alſo geleſen: 46 Ganze (Einheiten), 3 Zehntel, 4 Hundertel, 5 Tauſendtel.

Da ein Hundertel ſo viel iſt als ein Zehntel von einem Zehntel, alſo ein Zehntel zehn Hundertel hat, ſo kann man ſtatt 3 Zehntel eben ſo gut 30 Hundertel, und daher ſtatt 3 Zehntel und 4 Hundertel, 34 Hundertel ſagen. Da ein Tauſendtel ein Zehntel von einem Hundertel iſt, alſo ein Hundertel zehn Tauſendtel hat, ſo kann man ſtatt 4 Hundertel: 40 Tauſendtel, und ſtatt 34 Hundertel: 340 Tauſendtel, und folglich ſtatt 34 Hundertel und 5 Tauſendtel, mit Einem 345 Tauſendtel ſagen.

Man kann ſomit die Zahl 46·345 beliebig leſen:

a) 46 Ganze, 3 Zehntel, 4 Hundertel, 5 Tauſendtel.
b) 46 Ganze, 34 Hundertel, 5 Tauſendtel.
c) 46 Ganze, 3 Zehntel, 45 Tauſendtel.
d) 46 Ganze, 345 Tauſendtel.

Digitized by Google

Unsere Schulen legen ganz mit Unrecht darauf einen Werth, daß ein Decimalbruch auf die letzte Weise ausgesprochen werde, während gerade die erste die einfachste ist, und den Vortheil hat, daß man Ziffer für Ziffer, wie sie ausgesprochen wurde, anschreiben kann, während man nach der letzten Weise erst dann zu schreiben anfangen kann, wenn der Werth der letzten Ziffer ausgesprochen wurde, man also die ganze Zahl im Gedächtniß behalten muß, was, wenn die Zahl etwas größer ist, zu vielen Irrungen Veranlassung geben kann. Kommen gar keine Ganzen vor, so muß die Stelle der Einheiten, die wir jederzeit mit dem Punkte oben bezeichnen wollen, mit Null ausgefüllt werden, z. B.: 0·35 kein Ganzes, 3 Zehntel, 5 Hundertel oder 35 Hundertel; 0·035 3 Hundertel, 5 Tausendtel oder 35 Tausendtel; 0·305 3 Zehntel, 5 Tausendtel oder 305 Tausendtel; 0·0035 3 Tausendtel, 5 Zehntausendtel oder 35 Zehntausendtel. Es hat somit die Aussprache eines Decimalbruches, sobald man sich nur den Namen jeder Stelle merkt, gar keine Schwierigkeit; die erste Stelle nach der der Einheit heißt Zehntel, die folgenden Hundertel, Tausendtel, Zehntausendtel, Hunderttausendtel, Milliontel, Zehnmilliontel, Hundertmilliontel, Tausendmilliontel u. s. w. Man kann auch auf die Decimalbrüche die bekannten Regeln der Aussprache ganzer Zahlen ausdehnen und sich merken, daß die dritte Stelle Tausendtel, die sechste Milliontel, die neunte Tausendmilliontel, die zwölfte Billiontel u. s. w. heißt; z. B. 7·036 925 814 703, kann gelesen werden: 7 Ganze, 36 Tausendtel, 925 Milliontel, 814 Tausendmilliontel, 703 Billiontel, was zum Andictiren gewiß zweckmäßiger ist, als die gewöhnliche Art, wo man 36 Tausend 925 Millionen 814 Tausend 703 Billiontel sagen würde.

Addition und Subtraction.

Es mögen bloß ganze Zahlen oder ganze Zahlen und Decimalbrüche vorhanden seyn, so bringt es die Natur der Addition sowohl als der Subtraction mit sich, daß man nur Gleichartiges zusammenzählen oder von einander wegnehmen kann; daher ist eine an und für sich klare Forderung sowohl bei der Addition als bei der Subtraction, die Zahlen so unter einander zu schreiben, daß die gleichnamigen Stellen unter einander zu stehen kommen, d. h. Hunderter unter Hunderter, Zehner unter Zehner, Einheiten unter Einheiten, Zehntel unter Zehntel, Hundertel unter Hundertel, Tausendtel unter Tausendtel u. s. w. Man addirt die Ziffern derselben Stelle, desselben Ranges zusammen, ist die Summe größer als 10, so addirt man so viele Einheiten zur nächst höheren Stelle, als in dem gefundenen Resultate Zehner enthalten sind, das Uebrige, was immer kleiner als 10 ist, schreibt man unter die Ziffern, die man zusammengezählt hat. Diese bei der Addition ganzer Zahlen bekannte Regel gilt eben so gut, auch wenn Decimalbrüche, d. h. Stellen hinter dem Einheitszeichen, vorhanden sind, da ein Zehntel so gut 10 Hundertel enthält, als z. B. ein Hundertel 10 Zehner.

Digitized by Google

Beispiel 1. Es sollen 1034, 43·57, 8·00532, 7,0·424, dann 0·00068 zusammenaddirt werden, so hat man:

1034
43·57
8·00532
7
0·424
0·00068
1093·00000

Wofür man kurzweg 1093 schreiben kann, da, sobald keine bedeutenden Ziffern nachfolgen, die Nullen hinter dem Einheitszeichen so überflüssig sind, als bei ganzen Zahlen die Nullen am Anfange.

Beispiel 2. Von 72·305 soll 12·0743 weggenommen werden:

72·305
12·0743
Rest = 60·2307

Um die 3 Zehntausendtel wegzunehmen, erinnere ich mich, daß 5 Tausendtel gleich 50 Zehntausendtel sind, sage also 3 Zehntausendtel von 10 Zehntausendtel bleiben 7 Zehntausendtel, die ich auch an die Stelle der Zehntausendtel schreibe; dann gibt 4 Tausendtel von 4 Tausendtel kein Tausendtel, daher ich auch an die Stelle der Tausendtel 0 schreibe, u. s. w.

Beispiel 3. Es soll von 5 Ganzen ein Tausendtel weggenommen werden:

5·000
0·001
4·999

Ich kann jeder Zahl, sobald die Stelle der Einheit durch das Einheitszeitszeichen festgestellt ist, so viel Nullen anhängen als ich will, ohne dadurch ein Mißverständniß zu befürchten; denn 5·000 heißt nicht 5000, sondern 5 Ganze, 0 Zehntel, 0 Hundertel, 0 Tausendtel, oder wenn man will: 5000 Tausendtel, und nun geht die Subtraction nach den bekannten Regeln der Subtraction fort; um das 1 Tausendtel wegzunehmen, muß ich 1 Ganzes von den 5 wegnehmen, und es in 10 Zehntel auflösen, von diesen 1 Zehntel wegnehmen, und es in 10 Hundertel auflösen, von diesen 1 Hundertel, um es in 10 Tausendtel aufzulösen, wodurch der obige Rest herauskommt.

Multiplication.

Man sagt gewöhnlich, eine Zahl wird mit 10 multiplicirt, wenn man ihr rechts eine Null anhängt; abgesehen von dem bloß Mechanischen dieser Regel, gibt sie Veranlassung zu einer irrigen Vorstellung, denn das, an was man etwas anhängt, bleibt an seinem Platze stehen, während die Ziffern der mit 10 zu multiplicirenden Zahl nicht stehen

Digitized by Google

bleiben dürfen. Multiplicire ich z. B. 3 mit 10, so darf 3 an dem Platze der Einheiten, wo es ist, nicht stehen bleiben; sondern, da es statt 3 Einheiten 3 Zehner bedeuten soll, so muß die 3 an die Stelle der Zehner vorrücken, und der dadurch leer gewordene Platz mit 0 ausgefüllt werden; soll 43 mit 10 multiplicirt werden, so soll sowohl die 40 als die 3 mit 10 multiplicirt, d. h. der Werth einer jeden Ziffer verzehnfacht werden, daher jede Ziffer um eine Stelle gegen links vorrücken, die leer gewordene Stelle der Einheit dann mit Null ausgefüllt werden muß, und so hat man 430.

Multiplicirt man also irgend eine Zahl mit oder ohne Decimalstellen mit 10, so muß jede Ziffer um eine Stelle gegen die Linke vorgeschoben werden. Kommen keine Zehntel und folgende Decimalstellen vor, so bleibt die Stelle der Einheiten leer und ihr Platz wird mit einer Null ausgefüllt; kommen aber Decimalstellen vor, so rückt die Ziffer der Zehntel an die Stelle der Einheiten, die Ziffer der Hundertel an die Stelle der Zehntel, u. s. w. Diese ganze Vorrückung wird dadurch erreicht, wenn der Einheitspunkt um eine Stelle gegen die Rechte zurückgerückt wird, z. B.:

$$\begin{aligned} 356 \times 10 &= 3560 \\ 35{\cdot}6 \times 10 &= 356 \\ 73{\cdot}289 \times 10 &= 732{\cdot}89 \end{aligned}$$

Multiplicirt man hingegen eine Zahl mit 100, so muß jede Ziffer um 2 Stellen nach links vorgeschoben werden, oder der Einheitspunkt um 2 Stellen rückwärts gesetzt werden:

$$\begin{aligned} 356 \times 100 &= 35600 \\ 35{\cdot}6 \times 100 &= 3560 \\ 73{\cdot}289 \times 100 &= 7328{\cdot}9 \end{aligned}$$

Wird eine Zahl mit 1000, 10000, 100000, 1000000 u. s. w. multiplicirt, so muß jede Ziffer um 3, 4, 5, 6 u. s. w. Stellen gegen links vorrücken, oder der Einheitspunkt um so viele Stellen rückwärts gesetzt werden:

$$\begin{aligned} 35{\cdot}6 \times 1000 &= 35600 & 0{\cdot}000735 \times 10 &= 0{\cdot}00735 \\ 35{\cdot}6 \times 10000 &= 356000 & 0{\cdot}000735 \times 100 &= 0{\cdot}0735 \\ 35{\cdot}6 \times 100000 &= 3560000 & 0{\cdot}000735 \times 1000 &= 0{\cdot}735 \\ 73{\cdot}289 \times 1000 &= 73289 & 0{\cdot}000735 \times 10000 &= 7{\cdot}35 \\ 73{\cdot}289 \times 10000 &= 732890 & 0{\cdot}000735 \times 100000 &= 73{\cdot}5 \\ 73{\cdot}289 \times 100000 &= 7328900 & 0{\cdot}000735 \times 1000000 &= 735 \end{aligned}$$

Habe ich nun eine Zahl mit 20 zu multipliciren, so habe ich sie mit 2 und 10 zu multipliciren, d. h. ich habe sie nach der gewöhnlichen Art mit 2 zu multipliciren, und jede Ziffer des erhaltenen Products um eine Stelle höher gegen die Linke zu setzen, wodurch die Multiplication mit 10 verrichtet wird.

Um diese Veränderung der Stellung im Producte gut im Auge zu haben, schreibt man beide Factoren so unter einander, daß die gleichnamigen Stellen unter einander kommen:

Digitized by Google

35·6
20
712 , daher 35·6 × 20 = 712

Indem ich ſage: 2mal 6 iſt 12, ſchreibe ich die 2 ſtatt unter die Zehntel, unter die Einheit, wodurch ich mit 10 multiplicire; 2mal 5 iſt 10 und 1 iſt 11, ſtatt die 1 unter die Einheiten, ſchreibe ich ſie unter die Zehner, u. ſ. w.

348
20
6960

Weil ich hier 2 × 8 = 16, die 6 an die Stelle der Zehner ſetze, ſo muß ich die Stelle der Einheiten mit Null ausfüllen.

Ueberhaupt wenn ich eine Zahl mit einer Ziffer multiplicire, die an der Stelle der Zehner ſteht, ſo multiplicire ich die Zahl mit der Ziffer, ſetze aber jede Ziffer des Products um eine Stelle höher:

532	5·32	53·2	0·532	0·0532
30	30	30	30	30
15960	159·6	1596	15·96	1·596

Wenn ich mit einer Ziffer multiplicire, die an der Stelle der Hunderte ſteht, ſo multiplicire ich die Zahl mit dieſer Ziffer, und ſetze jede Ziffer des Products um zwei Stellen höher gegen die Linke:

532	53·2	5·32	0·532	0·0532
300	300	300	300	300
159600	15960	1596	159·6	15·96

Eben ſo wenn ich mit einer Ziffer multiplicire, die an der Stelle der Tauſender, Zehntauſender, Hunderttauſender u. ſ. w. ſteht, multiplicire ich mit dieſer Ziffer wie gewöhnlich, nur ſetze ich jede reſultirende Ziffer um 3, 4, 5 u. ſ. w. Stellen höher gegen die Linke, wodurch ich die Multiplication mit 1000, 10000 u. ſ. w. verrichte.

5·32	0·0532
3000	3000
15960	159·6

Um ſich nicht zu irren, und zur Erleichterung kann der Gedanke dienen, daß, wenn ich eine Zahl mit 10, 100, 1000 u. ſ. w. multiplicire, dadurch die Ziffer, die an der Stelle der Einheiten bei der zu multiplicirenden Zahl ſteht, an die Stelle der Zehner, Hunderter, Tauſender u. ſ. w. kommt, wodurch dann auch alle übrigen Ziffern ihre gehörige Stellung erhalten.

Habe ich eine Zahl mit 0·1 zu multipliciren, ſo heißt das ſo viel, als ein Zehntel dieſer Zahl nehmen, alſo ſo viel, als ſie durch 10 zu dividiren; ſoll ich aber ein Zehntel einer Zahl, alſo ein Zehntel eines jeden ihrer einzelnen Theile nehmen, ſo wird der Werth einer jeden Ziffer ein Zehntel ihres früheren Werthes, ich muß daher jede Ziffer um eine Stelle zurück gegen rechts rücken, wodurch allein die Diviſion

Digitized by Google

durch 10, oder was dasselbe ist, die Multiplication mit 0·1 verrichtet ist.

7320	× 0·1 =	732	(Wollte man 732·0 schreiben, so
732	× 0·1 =	73·2	ist hier die 0 ganz überflüssig.)
73·2	× 0·1 =	7·32	
7·32	× 0·1 =	0·732	

Eben so habe ich eine Zahl mit 0·01, 0·001, 0·0001, 0·00001 u. s. w. zu multipliciren, d. h. gerade so viel, als durch 100, 1000, 10000 u. s. w. zu dividiren, so verrichte ich diese Multiplication dadurch, daß ich jede Ziffer um 2, 3, 4, 5 u. s. w. Stellen gegen die rechte Seite zurückschiebe, oder was dasselbe ist, den Einheitspunkt um eben so viele Stellen gegen links vorrücken lasse.

732·056 × 0·01	= 7·32056
732·056 × 0·001	= 0·732056
732·056 × 0·0001	= 0·0732056
732·056 × 0·00001	= 0·00732056

Auch hier kann der Gedanke Erleichterung gewähren, daß die Ziffer der Einheiten in der zu multiplicirenden Zahl an die Stelle kommt, die der Factor anzeigt; so kommt im ersten der vier vorhergehenden Beispiele die 2 im Product an die Stelle der Hundertel, weil der Factor ein Hundertel ist; im zweiten Falle kommt diese 2 an die Stelle der Tausendtel, im dritten an die Stelle der Zehntausendtel, im vierten an die Stelle der Hunderttausendtel.

Habe ich nun mit 0·2 zu multipliciren, so multiplicire ich mit 2 wie gewöhnlich, schreibe aber jede Ziffer des Products um eine Stelle niedriger gegen die Rechte, wodurch dann die Multiplication mit 2 und mit 0·1 verrichtet ist.

432	4·32	0·432
0·2	0·2	0·2
86·4	0·864	0·0864

Habe ich überhaupt mit einer Ziffer zu multipliciren, die an der Stelle der Zehntel, Hundertel, Tausendtel u. s. w steht, so multiplicire ich die Zahl zuerst mit der gegebenen Ziffer, schreibe aber immer jede Ziffer des Products um 1, 2, 3 u. s. w. Stellen niedriger gegen die Rechte. Um z. B. eine Zahl mit 0·7 zu multipliciren, multiplicire ich sie mit 7 und mit 0·1; die zweite Multiplication wird bloß durch die Stellung vollzogen, indem ich jede Ziffer des Products um eine Stelle niedriger gegen die Rechte setze. Die Multiplication mit 0·07 löse ich in die mit 7 und mit 0·01 auf, die zweite wird dadurch verrichtet, daß ich jede Ziffer des Products um zwei Stellen niedriger gegen die Rechte setze.

1023·4	1023·4	1023·4	1023·4
0·2	0·02	0·002	0·0002
204·68	20·468	2·0468	0·20468

Digitized by Google

Nach dem Vorhergehenden wird es für uns keine weitere Schwierigkeit haben, zwei zusammengesetzte Zahlen mit einander zu multipliciren. Habe ich z. B. 321 mit 213 zu multipliciren, so habe ich also 321 mit 200, mit 10 und mit 3 zu multipliciren, und es ist hier ganz gleichgiltig, ob ich zuerst mit 200, dann mit 10, und endlich mit 3 multiplicire, oder zuerst mit 200, dann mit 3, und zuletzt mit 10, oder endlich ob ich zuerst mit 3, dann mit 10, und zuletzt mit 200 multiplicire, wie dieses in den drei nachfolgenden Anschreibweisen ersichtlich ist.

321	321	321
213	213	213
642	642	963
321	963	321
963	321	642
68373	68373	68373

Es ist für uns wichtig, daß wir uns diese Freiheit im Multipliciren nehmen, weil wir in der Folge dieselbe benützen wollen; gewöhnlich ist nur die dritte Art gebräuchlich; sie sowohl als die erste haben das Gute, daß man beim Multipliciren auf keine Ziffer vergißt.

Ganz auf dieselbe Art verfahre ich, wenn auch Decimalziffern vorhanden sind, z. B.:

3·21	3·21	3·21
21·3	21·3	21·3
64·2	64·2	0·963
3·21	963	3·21
963	3·21	64·2
68·373	68·373	68·373

Indem ich mit 20 multiplicire (d. i. die 2 im unteren Factor), multiplicire ich mit 2, und schreibe die Ziffer des Products um eine Stelle höher, ich sage so: 2mal 1 ist 2; statt aber diese 2 unter die Hundertel (wo das 1 steht), schreibe ich sie unter die Zehntel; 2mal 2 ist 4, statt die 4 unter die Zehntel, wo die 2 steht, zu schreiben, schreibe ich die 4 unter die Einheiten; 2mal 3 ist 6, ich schreibe die 6 statt unter die Einheiten, unter die Zehner. Indem ich mit der Ziffer der Einheit 1 multiplicire, bleibt jede Ziffer an ihrem Platze stehen. Indem ich mit 0·3, d. i. der dritten Ziffer im untern Factor, multiplicire, wird jede Ziffer um eine Stelle oder Rang vermindert. Ich sage so: 3mal 1 ist 3, statt die 3 aber an die Stelle der Hundertel zu schreiben, schreibe ich sie an die Stelle der Tausendtel; 3mal 2 ist 6, statt die 6 aber an die Stelle der Zehntel zu schreiben, schreibe ich sie an die Stelle der Hundertel; 3mal 3 ist 9, statt die 9 an die Stelle der Einheiten, schreibe ich sie an die Stelle der Zehntel.

Diese Freiheit im Multipliciren geht so weit, daß ich die Ziffer beider Factoren ganz einzelnweise mit einander multipliciren kann, wenn ich nur kein einzelnes Theilprodukt vergesse, und jedes nach seinem

Digitized by Google

Range gehörig anschreibe. Z. B. 6789 soll mit 1234 multiplicirt werden. Ich suche zuerst alle Stellen auf, die mit einander multiplicirt Einheiten geben, das sind bloß Einheiten, 4mal 9 ist 36; Zehner geben uns die Einheiten mit den Zehnern, und die Zehner mit den Einheiten daher 8.4 = 32, und 3.9 = 27; 32 und 27 = 59 Zehner, ich habe daher die 9 an die Stelle der Zehner, und die 5 an die Stelle der Hunderter zu schreiben; Hunderter erhalte ich aus.

Hundertern mit Einheiten, Zehnern mit Zehnern, Einheiten mit Hundertern
7mal 4 mehr 8mal 3 mehr 9mal 2 gibt 28 + 24 + 18 = 70,

da diese 70 Hunderter sind, so kommt 0 an die Stelle der Hunderter und 7 an die der Tausender. Tausender erhalte ich aus:

Tausendern mit Einheiten, Hundertern mit Zehnern, Zehnern mit Hundertern, Einheiten mit Tausendern
6mal 4 mehr 7mal 3 mehr 8mal 2 mehr 9mal 1, d. i. 24+21+16+9 = 70.

Zehntausender erhalte ich aus:

Tausendern mit Zehnern, Hundertern mit Hundertern, Zehnern mit Tausendern
6mal 3 mehr 7mal 2 mehr 8mal 1, d. i. 18 + 14 + 8 = 40.

Hunderttausender erhalte ich aus:

Tausendern mit Hundertern, Hundertern mit Tausendern
6mal 2 mehr 7mal 1 = 12 + 7 = 19.

Millioner aus Tausendern mit Tausendern 6mal 1 = 6.

6 789
1 234
36
59
70
70
40
19
6
8 377 626

9.4 = 36;

9.3 = 27
8.4 = 32
59

8.1 = 8
7.2 = 14
6.3 = 18
40

9.2 = 18
8.3 = 24
7.4 = 28
70

7.1 = 7
6.2 = 12
19

9.1 = 9
8.2 = 16
7.3 = 21
6.4 = 24
70

6.1 = 6

Verrichtet man die Multiplication auf die gewöhnliche Art, so erhält man dasselbe Resultat.

Zweites Beispiel. 13579 zu multipliciren mit 2468; wir wollen hier mit der obersten Stelle anfangen.

Ein Zehntausender mit 2 Tausender gibt 2 Zehnmillioner.

13.579	1.4 = 4	1.6 = 6	1.8 = 8	3.8 = 24
2.468	3.2 = 6	3.4 = 12	3.6 = 18	5.6 = 30
2	10	5.2 = 10	5.4 = 20	7.4 = 28
10		28	7.2 = 14	9.2 = 18
2 8			60	100
60				
100		5.8 = 40	7.8 = 56	9.8 = 72
11.8		7.6 = 42	9.6 = 54	
1.10		9.4 = 36	110	
72		118		
33,512.972				

Bei kleinern Beispielen, oder wenn der Rechner sehr geübt ist, schreibt man die Theilproducte auf der Seite gar nicht an. Z. B.

321
213
68373

hier ist man leicht im Stande von unten auf gleich die Ziffern des Productes anzuschreiben.

Zur Uebung, um sich recht in den Geist unseres Zahlensystems hineinzudenken, rathen wir Anfängern an, darüber Beispiele auszuarbeiten; aber als eine eigene Rechnungsmethode können wir das Vorhergehende durchaus nicht empfehlen, weil, wenn man die Theilproducte anschreibet, man mehr Zeit braucht, als bei der gewöhnlichen Art, und ohne Anschreiben der Theilproducte man sich gar leicht vielen Fehlern aussetzet.

Diese hier entwickelten Gedanken festhaltend, bedarf man gar keiner weiteren Regeln bei der Multiplication der Decimalbrüche; nachfolgende Beispiele mögen zur weiteren Erläuterung und Einübung dienen:

0·9765625	1024
1024	0·9765625
976·5625	921·6
19·531250	71·68
3·9062500	6·144
1000·0000000	5120
	6144
	2048
	5120
	1000·0000000

Digitized by Google

1·534	2·67
2·67	1·534
3 068	2·67
9204	1·335
10738	801
4·09578	1068
	4·09578
876·07	45·39
45·39	876·07
35042·8	36312
4380·35	3177·3
262·821	272·34
78·8463	3·1773
39764·8173	39764·8173
3078·9	5·0573
5·0573	3078·9
15394·5	15171·9
153·945	354·011
21·5523	40·4584
92367	4·55157
15570·92097	15570·92097

Statt zu sagen: die Stelle der Zehntel, die Stelle der Hundertel, die Stelle der Tausendtel u. s. w., sagt man kürzer die erste, zweite, dritte u. s. w. Stelle nach dem Einheitspunkte. Wenn nun, wie in dem letzten Beispiele, der eine Factor drei Decimalstellen, der andere zwei hat, so muß begreiflich das Product fünf Decimalstellen haben, denn wenn man eine Ziffer an der dritten Decimalstelle mit einer Ziffer an der zweiten Decimalstelle multiplicirt, so muß die Ziffer des Products, weil sie um zwei Ränge vermindert wird, an die fünfte Stelle kommen. Multiplicire ich eben so 8·4569 mit 2·003, so muß das Product 7 Decimalstellen haben, denn die niedrigste Stelle entsteht aus der Multiplication von 9 und 3, 9 steht an der vierten Stelle, und da es mit 3, das an der dritten Stelle steht, multiplicirt werden soll, so muß die 7 von 27 um 3 Ränge vermindert werden, also an die 7te Stelle kommen. Multiplicire ich 1·00326 mit 0·00387, so wird das Product 10 Decimalstellen haben, denn wenn ich die niedrigste Ziffer 6, die an der 5ten Stelle stehet, mit der niedrigsten Ziffer des andern Factors 7, die auch an der fünften Stelle stehet, multiplicire, so muß ich die Ziffer 2 von 42 um 5 Ränge vermindern, sie daher statt an die 5te, an die 10te Stelle setzen. Verfolgt man diese Schlüsse, so gelangt man zu dem allgemeinen Resultate: Das Product hat immer so viel Decimalstellen als beide Factoren zusammen haben.

Wenn man also Zahlen, die mehrere Decimalstellen haben, mti

einander multiplicirt, so wächst im Allgemeinen die Anzahl der Decimalen im Producte immer mehr und mehr. Je mehr man aber Decimalstellen hat, desto niedriger ist der Werth der niedrigsten Stellen. Sehr niedrige Decimalstellen sind aber im praktischen Leben werthlos, so ist z. B. 0·001 Klafter gleich dem tausendsten Theile einer Klafter, und da eine Klafter = 6 Schuh = 72 Zoll = 864 Linien = 10368 Punkte ist, so ist ein 0·001 Klafter = 0·864 Linien = 10·368 Punkte. Wenn man nun in Klaftern rechnet, so ist im Allgemeinen die Genauigkeit nie so groß, daß man eine Linie berücksichtigen wird; wenn man also in Klaftern rechnet, so wird man gewiß die vierte Decimalstelle ganz vernachläßigen, um so mehr wird man dieß thun, wenn man in Schuhen und Zollen rechnet, ausgenommen die Fälle, wo der höchste Grad der Genauigkeit erfordert wird, der höchstens nur im wissenschaftlichen Leben vorkommen kann. Rechnet man in Gulden, so ist ein 0·001 Gulden $= \frac{240}{1000}$ Pfennige = 0·24 Pfennige, eine sehr kleine, werthlose Größe. Im Endresultate wird man also 0·001 Gulden gewiß wegwerfen, in der Mitte der Rechnung, wenn viele solche Posten zusammenaddirt werden, kann durch die Addition vieler dritter Stellen, in den zweiten und ersten Stellen eine Veränderung geschehen, daher man in solchen Fällen vorsichtigerweise die dritten Stellen nicht wegwirft. Ueberhaupt muß man bei Vernachläßigung der Decimalstellen stets ihren Einfluß auf das Endresultat im Auge haben. Eben wegen diesem Anhäufen der Decimalstellen, die werthlos sind, und doch die Rechnung erschweren, muß man darauf bedacht seyn, diesem Uebelstande zu begegnen. Ein bloßes Wegwerfen der werthlosen Decimalstellen genügt namentlich beim Multipliciren nicht, denn eine werthlose Decimalstelle kann durch Multiplication mit einer hochgestellten Ziffer zu bedeutendem Einflusse kommen, man wird also die Vernachläßigung nicht bei den Factoren, sondern erst im Producte eintreten lassen. Folgendes Beispiel mag diesen Gegenstand erläutern. Es soll 3·02136 mit 6·00782 multiplicirt werden, und man verlangt im Producte nur 3 Decimalstellen. Hier sind entschieden bei beiden Factoren 4 Decimalen hinreichend, ich lasse also die fünften Stellen weg, wenn ich aber bei dem ersten Factor die 6 weglasse, so erhöhe ich dafür die 3 zu 4, denn ich begehe einen geringeren Fehler, wenn ich statt 3·02136 3·0214 sage, wo ich also 0·00004 zu viel habe, als wenn ich statt 3·02136 bloß 3·0213 sage, wo ich um 0·00006 zu wenig habe. Eine solche Erhöhung der letzten Ziffer, wenn man die übrigen wegläßt, macht man immer, wenn die höchste der weggelassenen Ziffern 5 oder höher als 5 ist. Wir wollen also 3·0214 mit 6·0078 multipliciren, und zur besseren Einsicht die abgekürzte Art neben die unabgekürzte setzen.

3·0214		3·0214
6·0078		6·0078
18·1284	...	18·1284
211	498.	211
24	1712	24
18·1519	6692	18·1519

Digitized by Google

Ich rechne vorsätzlich bei der abgekürzten Rechnung in 4 Stellen, damit die dritte ganz genau sey.

Ich multiplicire zuerst mit der 6, und da diese eine Einheit ist, so bleibt jede Ziffer des Products an ihrem Platze, daher kommt die 4 von $6 \times 4 = 24$ an die vierte Stelle, welche ich noch beibehalte. Wenn ich nun mit der 7 multiplicire, welche an der dritten Stelle nach dem Einheitszeichen steht, so muß jede Ziffer des Products um 3 Ränge vermindert werden; da nun die 4 an der vierten Stelle steht, so würde die 8 von $7 \times 4 = 28$ an die 7te Stelle kommen, die ich nicht brauche, daher man sich die 4 durchstreicht; 7 mit 1 würde eine sechste Stelle geben, die man ebenfalls nicht braucht, daher man auch die 1 durchstreicht; 7 mit 2 gibt 14, davon die 4 an die 5te Stelle käme, die ich nicht brauche, 1 aber zur vierten Stelle kommt; ich durchstreiche daher die 2, und sage: 7mal 2 gibt 14, was mir 1 für die 4te Stelle gibt, da nun 7mal 0 gleich 0 ist, so kommt 1 an die 4te Stelle. Ich durchstreiche ferners die 0 hinter 3, denn 0 mit 8 würde eine 5te Stelle geben; endlich 3mal 8 gibt 24, wovon 4 an die 4te, und 2 an die 3te Stelle kommt. Es ist somit das Product 18·1519, oder in drei Stellen 18·152.

Zweites Beispiel.

51·03920	man verlangt das Product in
51·03920	3 Decimalen gut, daher wir
2551·9600	die Rechnung in 4 Stellen
51·0392	machen.
1·5312	
4593	
102	
2604·9999	wofür man 2605 nimmt, wenn man in 3 Stellen rechnet.

Ich will nun Rechenschaft geben über die Besetzung der vierten Decimalstellen in den Theilproducten. Da die 5 ein Zehner, so erhöht sie bei der Multiplication um einen Rang, ich sage daher 5mal 0 gibt 0, und schreibe diese 0 an die vierte Stelle; die 1 ist eine Einheit, daher ändert sie nichts im Range, 1mal 2 gibt 2, die also an der vierten Stelle bleibt; die 3 ist eine zweite Decimalstelle, die also um 2 Ränge vermindert bei der Multiplication; würde ich 3 mit 2 multipliciren, so würde diese 6 an die sechste Stelle kommen, die ich nicht brauche, ich streiche daher nicht bloß die 2, sondern auch 9 durch, weil 3 als eine zweite Stelle, mit 9 als einer dritten Stelle, uns eine fünfte Stelle geben würde, die wir nicht brauchen; aber 3mal 9 gibt 27, die 2 gehört schon zur vierten Stelle, da aber 27 näher zu 30 als zu 20 ist, so sage ich $3 \times 9 = 27$ gibt 3 zur Correctur der vierten Stelle, 3mal 3 ist 9, und die Correctur 3 dazu gibt 12, wo also 2 an die vierte Stelle kommt; ich komme dann an die Multiplication mit 9, ich streiche früher 3 durch, weil eine zweite Stelle mit einer dritten Stelle

Digitized by Google

multiplicirt eine fünfte Stelle gibt: obwohl diese 3 durchstrichen ist, so sage ich doch 9×3 ist 27, gibt 3 zur Correctur, 9mal 0 ist 0, und 3 ist 3, daher im vierten Theilproducte 3 an die vierte Stelle kommt; ich durchstreiche dann die Null, weil eine vierte Stelle 2 mit einer ersten Stelle 0 uns eine fünfte Stelle geben würde, und sage: 1mal 2 gibt 2 an die vierte Stelle, daher die Correctur 0 ist. Das Product ist 2604·9999, wofür man, wenn man bloß in 3 Stellen rechnet, 2605 nimmt, denn durch das Auslassen des vierten Neuners wird der vorhergehende und die ihm vorhergehenden alle zu 10 erhöht.

Drittes Beispiel.

45763 × 406·0895738.

Wir wollen im Producte bloß 4 Decimalstellen haben. Zur größeren Sicherheit werden wir 5 Stellen suchen.

45763
406·0895738

183052..
274578
3661·04
411·867
22·8815
3·20341
·13729
3661

18583877·16581

Die ausführliche Rechnung gibt 18583877·1658094 zum Producte.

Viertes Beispiel.

317·0857 × 5349·706.

Es sey uns genügend 3 Decimalstellen im Producte zu erfahren.

317·0857
5349·706

1585428·5
95125·71
12683·428
2853·7713
221·9600
1·9025

1696315·2718

Das ausführliche Product lautet: 1696315·2718042.

Fünftes Beispiel.

0·008759 × 0·89034.

Man verlangt bloß 4 Decimalstellen im Producte.

Digitized by Google

0·008759
0·89034
700
78
0·00778

Führt man die ganze Rechnung durch, so erhält man das Product 0·00779848806.

Eben so gibt 1·414214, multiplicirt mit 2·236068, zum Product 3·16228, oder in 4 Stellen 3·1623; und 1·414214, multiplicirt mit 2·828427, zum Product 4.

Beispiele zur Uebung:

1) 3·078537 × 0·905386.
Das Product bloß in 4 Decimalen lautet: 2·7872.

2) 56·3095 × 7·854.
Das Product in 3 Decimalstellen ist: 442·254.

3) 4675·378543 × 94·5786.
Bestimmt man im Producte bloß 5 Decimalen, so hat man: 442190·75705.

4) 3008·7 × 0·000798.
Begnügt man sich mit zwei Decimalstellen, so lautet das Product: 2·40.

Division.

Wir wollen hier zuerst diejenigen Fälle ins Auge fassen, wo der Divisor nur eine Ziffer hat. Wenn ich 7320 durch 10 zu dividiren habe, so muß ich von jeder einzelnen Ziffer nur den zehnten Theil nehmen, daher muß ich den Rang einer jeden Ziffer um einen vermindern, es muß also die 7 statt Tausender nur Hunderter, die 3 statt Hunderter Zehner, die 2 statt Zehner Einheiten bedeuten, daher: 7320 : 10 = 732, wie das allbekannt ist. Wäre nun hier statt der Null an der Stelle der Einheiten eine bedeutende Ziffer, so müßte diese natürlich an die Stelle der Zehntel wandern, daher z. B. 7325 : 10 = 732·5, eben so 7325·6 : 10 = 732·56, 7325·67 : 10 = 732·567. Durch 10 wird also eine jede Zahl dividirt, wenn ich jede ihrer Ziffern um einen Rang vermindere, da durch 10 dividiren gerade so viel ist, als mit 0·1 zu multipliciren. Habe ich eben so 73200 durch 100 zu dividiren, so erreiche ich meinen Zweck, wenn ich den Werth jeder einzelnen Ziffer durch 100 dividire, d. h. jede Ziffer um zwei Ränge vermindere, die 7 muß daher von der Stelle der Zehntausender an die Stelle der Hunderter, die 3 von der Stelle der Tausender an die Stelle der Zehner, die 2 von der Stelle der Hunderter an die Stelle der Einheiten kommen, daher: 73200 : 100 = 732; wären hier an den Stellen der Zehner und Einheiten bedeutende Ziffern, so müßten diese an die Stellen der Zehntel und Hundertel kommen, z. B.:

73245 : 100 = 732·45,

Digitized by Google

eben so

$$73245{\cdot}6 : 100 = 732{\cdot}456; \quad 73245{\cdot}67 : 100 = 732{\cdot}4567;$$
$$73245{\cdot}678 : 100 = 732{\cdot}45678.$$

Also eine Zahl wird durch 100 dividirt, wenn jede ihrer Ziffern um zwei Ränge vermindert wird, und durch 100 dividiren ist gerade so viel, als mit 0·01 multipliciren. Eben so wird eine Zahl durch 1000, 10000, 100000 u. s. w. dividirt, wenn man den Rang jeder Ziffer um 3, 4, 5 u. s. w. Stellen niedriger gegen die Rechte setzt, oder um eben so viele Stellen den Decimalpunkt gegen die Linke vorrücken läßt. Dividirt man die Zahl 7320 durch 40, so habe ich also die Zahl durch 4 und durch 10 zu dividiren; ich verrichte diese Division, wenn ich wie gewöhnlich durch 4 dividire, dabei aber zugleich den Rang einer jeden Ziffer um einen vermindere, und zwar auf folgende Art: 7 ist ein Tausender, 7 dividirt durch 4, gibt 1, die also, wenn 4 eine Einheit wäre, immer Tausender bedeuten würde, da aber 4 ein Zehner ist, an die Stelle der Hunderter kommt. Es bleiben 3, welche mit den nachfolgenden 3 uns 33 Hunderter geben; 33 : 4 gibt 8, die 8 schreibe ich statt an die Stelle der Hunderter, an die Stelle der Zehner; es bleibt 1, die mit der folgenden 2 uns 12 Zehner gibt; 12 : 4 gibt 3, statt die 3 an die Stelle der Zehner, schreibe ich sie an die Stelle der Einheiten, und habe somit 7320 : 40 = 183; wäre hier an der Stelle der Einheiten noch eine bedeutende Ziffer, so müßte die Division fortgesetzt werden, und der Quotient an die Stelle der Zehntel kommen, z. B. $7328 : 40 = 183{\cdot}2$, eben so $7328{\cdot}16 : 40 = 183{\cdot}204$. Ist eben so die Zahl 73200 durch 400 zu dividiren, so ist dieß so viel, als durch 4 und durch 100 zu dividiren, ich verrichte also die Division durch 4, verringere aber beim Quotienten den Rang jeder Ziffer um 2 Ränge, so kommt $73200 : 400 = 183$, eben so $73280 : 400 = 183{\cdot}2$; $73281{\cdot}6 : 400 = 183{\cdot}204$. Wäre eben so 732000 durch 4000 zu dividiren, so dividire ich durch 4, und verringere den Rang jeder Ziffer um 3 Ränge, daher $732000 : 4000 = 183$, eben so $732816 : 4000 = 183{\cdot}204$; $732816{\cdot}12 : 4000 = 183{\cdot}20403$.

Habe ich also durch eine Ziffer zu dividiren, die an der Stelle der Zehner, Hunderter, Tausender, Zehntausender u. s. w. steht, so dividire ich wie gewöhnlich durch diese Ziffer, vermindere aber im Quotienten den Rang jeder Ziffer um 1, 2, 3, 4 u. s. w. Ränge, oder setze jede Ziffer des Quotienten um 1, 2, 3, 4 u. s. w. Stellen niedriger gegen die Rechte. Zu diesem Behufe ist es nur nothwendig, den Rang der ersten Ziffer des Quotienten zu bestimmen, da sich dadurch der Rang aller übrigen Ziffern von selbst ergibt; und zu diesem Zwecke ist es gut, wenn die erste Stelle des Quotienten eine höhere ist, alle Stellen bis zur Einheitsstelle sich zu punktiren, und dadurch anzudeuten, wo der Einheitspunkt hinkommt, damit man nicht bei jeder einzelnen Ziffer den Rang zu untersuchen braucht. Z. B. es sey $11764{\cdot}9$ durch 700 zu dividiren, ich sage hier 7 in 11 geht 1mal, die 11 sind hier Tausender, die um 2 Ränge vermindert werden müssen, also in Zehner übergehen müssen, daher ich die 1 im Quotienten an

Digitized by Google

die Stelle der Zehner schreibe, und die Stelle der Einheiten punktire, und hinter denselben den Einheitspunkt ansetze; der Anfang der Division sieht daher folgendermaßen aus:

$$11764{\cdot}9 : 700 = 1.\cdot$$

Hat man sich so den Rang der Ziffern festgesetzt, so dividirt man ruhig durch 7 weiter, ohne sich weiter um den Rang der einzelnen Ziffern zu kümmern, der sich von selbst ergibt; man hat so

$$11764{\cdot}9 : 700 = 16{\cdot}807.$$

Eben so wäre 12,207.031·25 durch 5000 zu dividiren, so sagt man: 5 in 12 geht 2mal, da aber die 12 an der Stelle der Millionen, so muß die 2 an die Stelle der Tausender kommen, und der Anfang der Division sieht folgendermaßen aus:

$$12{,}207.031{\cdot}25 : 5000 = 2...\cdot$$

woraus das Resultat herauskommt:

$$12{,}207.031{\cdot}25 : 5000 = 2441{\cdot}40625.$$

Wäre 6·255 durch 50 zu dividiren, so sage ich: 5 in 6 gehet 1mal, statt aber die 1 an die Stelle der Einheiten, schreibe ich sie an die Stelle der Zehntel, und habe: $6{\cdot}255 : 50 = 0{\cdot}1251$, eben so: $6{\cdot}255 : 500 = 0{\cdot}01251$; $6{\cdot}255 : 5000 = 0{\cdot}001251$. Zur weiteren Erläuterung und Einübung mögen folgende Beispiele dienen:

59049 :30 =1968·3	5904·9:30 =196·83	590·49 :30 =19·683
59049 :300 =196·83	5904·9:300 =19·683	590·49 :300 =1·9683
59049 :3000=19·683	5904·9:3000=1·9683	590·49 :3000=0·19683
59·049:30 =1·9683	5·9049:30 =0·19683	0·59049:30 =0·019683
59·049:300 =0·19683	5·9049:300 =0·019683	0·59049:300 =0·0019683
59·049:3000=0·019683	5·9049:3000=0·0019683	0·59049:3000=0·00019683

Bekanntlich enthält ein Ganzes zehn Zehntel, daher ein Zehntel in einem Ganzen zehnmal enthalten ist, daher $1 : 0{\cdot}1 = 10$; zwei Ganze haben 2mal zehn Zehntel in sich, oder 20 Zehntel, daher 0·1 in 2 Ganzen 20mal enthalten ist; eben so findet man, daß 0·1 in 3 Ganzen 30mal enthalten ist, daher hat man ganz sicher ohne Schwierigkeit die Einsicht, daß: $1 : 0{\cdot}1 = 10$: $2 : 0{\cdot}1 = 20$; $3 : 0{\cdot}1 = 30$; $4 : 0{\cdot}1 = 40$ u. s. w. Es hat daher jede Zahl 10mal so viel Zehntel in sich, als sie Einheiten hat, daher $13 : 0{\cdot}1 = 130$; $37 : 0{\cdot}1 = 370$; $592 : 0{\cdot}1 = 5920$; eben so $13{\cdot}5 : 0{\cdot}1 = 135$, denn die 13 Ganzen haben 130 Zehntel in sich, macht mit den 5 Zehnteln im Ganzen 135 Zehntel, daher 13·5 durch 0·1 dividirt, uns 135 zum Quotienten geben muß.

Wenn man also irgend eine Zahl durch 0·1 dividirt, so ist das Resultat genau dasselbe, als wenn man sie durch 10 multiplicirt hätte; d. h. der Rang einer jeden Ziffer wird um einen Rang erhöht. Da ein Ganzes 100 Hundertel enthält, so ist ein Hundertel in einem Ganzen 100mal enthalten, daher $1 : 0{\cdot}01 = 100$; zwei Ganze haben 200 Hundertel, daher $2 : 0{\cdot}01 = 200$; eben so $3 : 0{\cdot}01 = 300$, $4{\cdot}75 : 0{\cdot}01 = 475$, denn die 4 Ganzen haben 400 Hundertel, die 7 Zehntel haben 70 Hun-

Digitized by Google

dertel; daher die 4 Ganzen 7 Zehntel und 5 Hundertel, zusammen 475 Hundertel geben, daher 4·75 oder 475 Hundertel, durch 1 Hundertel dividirt, uns 475 Ganze geben. Eine Zahl durch 1 Hundertel dividiren heißt so viel, als sie durch 100 multipliciren, man muß also jede Ziffer um 2 Ränge erhöhen. Eben so leicht ergibt sich, daß eine Zahl durch 0·001, 0·0001, 0·00001 u. s. w. dividiren, gerade so viel ist, als sie durch 1000, 10000, 100000 u. s. w. multipliciren, daß man also die Division verrichtet, wenn man jede Ziffer um 3, 4, 5 u. s. w. Ränge erhöht.

Habe ich also die Zahl 218·7 durch 0·3 zu dividiren, so habe ich sie durch 3 und durch 0·1 zu dividiren; die erste Division verrichte ich auf die gewöhnliche Art, die zweite, daß ich jede Ziffer um einen Rang höher stelle; ich sage daher: 3 in 21 geht 7mal, da die 21 aber Zehner sind, so muß die 7 ein Hunderter werden, und somit 218·7 : 0·3 = 729.

Es sey ferner: '590·49 : 0·003, so sage ich: 3 in 5 geht 1mal, die 5 ist ein Hunderter, daher muß die 1 ein Hunderttausender werden, und ich schreibe mir daher für den Anfang der Division

590·49 : 0·003 = 1....'

an, und erhalte zum Ende:

590·49 : 0·003 = 196830

weil an die Stelle der Einheiten keine Ziffer kommt, so wird sie mit 0 ausgefüllt.

Man hätte diese Division auch dadurch verrichten können, daß man die Zahl 590·49 mit 1000 multiplicirt, wodurch man 590490 erhält, und diese durch 3 dividirt, was uns 196830 gibt.

Eben so erhält man:

59049 : 0·3 = 196830	5904·9 : 0·3 = 19683	590·49 : 0·3 = 1968·3
59049 : 0·03 = 1968300	5904·9 : 0·03 = 196830	590·49 : 0·03 = 19683
59049 : 0·003 = 19683000	5904·9 : 0·003 = 1968300	590·49 : 0·003 = 196830
59·049 : 0·3 = 196·83	5·9049 : 0·3 = 19·683	0·59049 : 0·3 = 1·9683
59·049 : 0·03 = 1968·3	5·9049 : 0·03 = 196·83	0·59049 : 0·03 = 19·683
59·049 : 0·003 = 19683	5·9049 : 0·003 = 1968·3	0·59049 : 0·003 = 196·83

Nach diesen Vorarbeiten wird uns die Division mehrzifferiger Zahlen keine weiteren Schwierigkeiten machen. Ich dividire den ersten Theil des Dividends durch den ersten Theil des Divisors, was mir die erste Ziffer des Quotienten gibt, deren Rang ich nach dem Vorausgehenden bestimme, und nun setze ich die Division ganz nach der gewöhnlichen Art fort, ich multiplicire die erste Ziffer des Quotienten mit dem ganzen Divisor, ziehe dieses Product vom Dividende in den gehörigen Stellen ab, dividire wieder den ersten Theil des Restes durch den ersten Theil des Divisors, wodurch ich die zweite Ziffer des Quotienten erhalte. Der Unterschied ist nur der, daß, wenn die Division nicht wie man sagt aufgeht, man die Division ohne Ende fortsetzen kann, und dadurch im Quotienten immer neue Decimalstellen erhält.

Man bricht dann nach Bedürfniß der Genauigkeit bei irgend einer

Digitized by Google

Stelle ab, indem man, falls die erste der weggelassenen Stellen 5 oder höher als 5 ist, die letzte der bleibenden Ziffern um 1 erhöht. Beispiele werden den Gegenstand am besten erläutern.

Es sey 17·28 durch 14·4 zu dividiren, so sagt man 17 : 14 gibt 1; da aber beide sowohl 17 als 14 Einheiten sind, so findet weder eine Erhöhung, noch eine Erniedrigung des Ranges Statt, und so kommt die Ziffer 1 des Quotienten an die Stelle der Einheiten, und man hat für den Anfang:

$$17{\cdot}28 : 14{\cdot}4 = 1{\cdot}$$

Mit dieser ersten Ziffer 1 des Quotienten multiplicire ich den ganzen Divisor; da diese 1 eine Einheit ist, so erhöht und erniedrigt sie bei der Multiplication keine Ziffer, schreibe ich nun das Theilproduct 14·4 so unter das Dividend, daß die Stellen derselben Ordnung unter einander zu stehen kommen, so hat man nach gemachter Subtraction:

$$\begin{array}{l} 17{\cdot}28 : 14{\cdot}4 = 1{\cdot} \\ \underline{14{\cdot}4} \\ 2{\cdot}88 \end{array}$$

und nun sagt man: 14 in 28 geht 2mal, welche 2 ich an die Stelle der Zehntel zu schreiben habe. Daß diese 2 Zehntel sind, sehe ich zur Controlle auch daraus, daß 28 Zehntel durch 14 Einheiten getheilt 2 Zehntel als Quotienten geben, da Einheiten als Divisoren oder Multiplicatoren den Rang unverändert lassen, und habe somit:

$$\begin{array}{l} 17{\cdot}28 : 14{\cdot}4 = 1{\cdot}2 \\ \underline{14{\cdot}4} \\ 2{\cdot}88 \\ \underline{2{\cdot}88} \\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

denn, indem ich mit 0·2 den Divisor 14·4 multiplicire, muß ich jede Ziffer um einen Rang vermindern.

Eben so erhalte ich:

1728 : 14·4 = 120	172·8 : 14·4 = 12	17·28 : 14·4 = 1·2
1728 : 1·44 = 1200	172·8 : 1·44 = 120	17·28 : 1·44 = 12
1728 : 0·144 = 12000	172·8 : 0·144 = 1200	17·28 : 0·144 = 120
1·728 : 14·4 = 0·12	0·1728 : 14·4 = 0·012	0·01728 : 14·4 = 0·0012
1·728 : 1·44 = 1·2	0·1728 : 1·44 = 0·12	0·01728 : 1·44 = 0·012
1·728 : 0·144 = 12	0·1728 : 0·144 = 1·2	0·01728 : 0·144 = 0·12

Es sey ferner 0·047 829 69 durch 0·005 904 9 zu dividiren, ich sage: 5 in 47 geht (wegen des nachfolgenden 9) 8mal, die 47 sind Tausendtel, aber auch die 5 sind Tausendtel, daher ich hier um 3 Ränge erhöhen muß, und somit die 8 im Quotienten an die Stelle der Einheiten zu setzen habe, es steht also der Anfang so:

$$0{\cdot}047\ 829\ 69 : 0{\cdot}005\ 904\ 9 = 8{\cdot}$$

mit diesem 8 multiplicire ich den ganzen Divisor, und schreibe das Theilproduct gehörig unter das Dividend, und habe sofort:

Digitized by Google

0·047 829 69 : 0·005 904 9 = 8·1
47 239 2
590 49
590 49
* * *

oder: 102·1920 : 31935 = 0·0032
95·805
6·3870
6·3870
* * *

Ich sage: 3 in 10 geht 3mal, weil nun aber der Divisor 3 an der Stelle der Zehntausender steht, so muß ich um 4 Ränge vermindern, da 10 aber Zehner sind, die um 4 Ränge vermindert Tausendtel geben, so kommt die 3 des Quotienten an die Stelle der Tausendtel. Wenn ich nun mit 3 des Quotienten den Divisor multiplicire, so muß ich den Rang jeder Ziffer um 3 vermindern.

Es ist auch gut, während der Division den Rang der Ziffern gut im Auge zu behalten, besonders wenn Nullen in den Quotienten kommen, wie folgendes Beispiel zeigt:

126·26515 : 5·05 = 25·003
101·0
25·26
25·25
1515
1515
* *

Nachdem ich die zweite Ziffer des Quotienten 5 gefunden habe, bleibt mir zum Reste 1; nun schreibe ich die nachfolgenden Ziffern des Dividendes herab, und sage: 5 in 15 geht 3mal; da die 5 des Divisors eine Einheit ist, die den Rang nicht verändert, die 15 aber Tausendtel sind, so muß die 3 des Quotienten Tausendtel seyn, daher ich an die Stelle der Zehntel und Hundertel Nullen setze, und die 3 an die Stelle der Tausendtel setze; es ist dieß schneller und sicherer, als wenn ich sagen würde: 505 in 15 gehet 0mal, 1 herab, 505 in 151 gehet wieder 0mal, 5 herab, 505 in 1515 gehet 3mal.

Digitized by Google

Man sieht daher aus dem Vorhergehenden, daß man sich als Hauptregeln zu merken hat:

1) Stehet der Multiplicator an der Stelle
der Zehntausender, Tausender, Hunderter, Zehner, Einheiten, so wird die Ziffer des Products
um 4, 3, 2, 1, keine Stelle erhöhet.

2) Stehet der Multiplicator an der Stelle
der Einheiten, Zehntel, Hundertel, Tausendtel, Zehntausendtel, so wird die Ziffer des Products
um keine, 1, 2, 3, 4, Stellen erniedriget.

3) Stehet der Divisor an der Stelle
der Zehntausender, Tausender, Hunderter, Zehner, Einheiten, so wird die Ziffer des Quotienten
um 4, 3, 2, 1, keine Stelle erniedriget.

4) Stehet der Divisor an der Stelle
der Einheiten, Zehntel, Hundertel, Tausendtel, Zehntausendtel, so wird die Ziffer des Quotienten
um keine, 1, 2, 3, 4, Stellen erhöhet.

Wer sich diese Regeln wohl behält, wird keine weitere Schwierigkeit weder in der Multiplication noch in der Division der Decimalbrüche finden.

Beispiele.

1) 15353·90262 : 35·29 = 435·078

12379
17920
27526
28232
0

2) 374189·367 : 43·7035

374189·3670 : 43·7035 = 8562
2456136
2709617
874070

3) 476389 : 0·973
476389 : 0·973 = 489608·4
8718
9349
5920
8200
4160
268 u. ſ. w.

4) 0·984503 : 5·0048 = 0·1966
484023
335910
356220
55932 u. ſ. w.

Eben ſo hat man:

5) 0·08 : 0·00002 = 4000
6) 353647·958354 : 437·98 = 807·4523
7) 1·2682044 : 37·082 = 0·0342
8) 158016·42 : 1·7046 = 92700
9) 95743·087 : 45·00379 = 2127·4....

Es erübrigt uns nur noch, die abgekürzte Art der Diviſion zu zeigen, wo man nämlich nur ſo viel Decimalſtellen in dem Quotienten erlangt, als es das Bedürfniß der Genauigkeit gerade verlangt. Ein Beiſpiel wird dazu am beſten dienen: 2508·92806 ſoll durch 92·41035 dividirt werden, und man verlangt im Quotienten nur 4 Decimalſtellen; da 9 in 25 2mal geht, und dieſe 2 ein Zehner iſt, ſo hat man im Quotienten 2 Ziffern vor dem Einheitszeichen, da man nun noch 4 Decimalſtellen, alſo im Ganzen im Quotienten 6 Ziffern verlangt, ſo brauche ich alſo im Dividende 7 Ziffern, im Diviſor 6, ich werde alſo 2508·928 durch 92·4104 dividiren

2508·928 : 92·4104 = 27·1498
1848·208
660 720
646 873
13 847
9 241
4 606
3 696
910
832
78
74
4

Die ganze Sache beſteht zunächſt darin, daß man bei jeder folgenden Theildiviſion ſtatt dem Reſte eine weitere Ziffer hinzuzufügen,

Digitized by Google

immer eine Ziffer rückwärts weiter gegen vorn im Divisor wegläßt, so streiche ich, nachdem ich die 2 im Quotus gefunden, und das Theilproduct abgezogen habe, die letzte 4 im Divisor durch; nachdem ich die 7 im Quotus gefunden habe, multiplicire ich die 7 mit der durchstrichenen 4, und sage: 7mal 4 ist 28, gibt 3 zur Correctur, 7mal 0 ist 0, und 3 ist 3, welche 3 ich als die niedrigste Ziffer im zweiten Theilproducte 646873 anschreibe; nach gemachter Subtraction streiche ich die 0 im Divisor durch, welche uns bei der Multiplication keine Correctur gibt, daher das dritte Theilproduct 9241 ist; nach Abzug dessen streiche ich 1 im Divisor durch, welches uns dann bei der Multiplication mit 4 ebenfalls keine Correctur gibt, daher ich als viertes Theilproduct 3696 habe; nach Abzug von diesem streiche ich 4 durch, wenn ich nun mit 9 multiplicire, sage ich: 9mal 4 ist 36, gibt uns 4 als Correctur, 2mal 9 ist 18, und 4 ist 22 u. s. w., daher das fünfte Theilproduct 832 ist u. s. w.

Hat der Dividend oder Divisor weniger Decimalstellen als zur abgekürzten Division nothwendig, so ergänzt man die fehlenden Stellen mit Nullen; soll z. B. 4867 durch 9·0465 dividirt werden, und man verlangt den Quotus in 2 Decimalen, so hat man zu bedenken: 9 Einheiten in 48 Hunderter gibt 5 Hunderter, daher hat der Quotus 3 Ziffern vor dem Einheitspunkte, da er nun 2 Ziffern nach dem Einheitspunkte haben soll, so brauche ich 5 Ziffern im Ganzen im Quotienten; da nun der Divisor auch im Ganzen 5 Ziffern hat, so braucht man im Dividende 6 Ziffern, und setzt somit:

```
4867·00 : 9·0465 = 537·99
4523·25
 343·75      da auch die nächste Ziffer wieder 9
 271·40      ist, so kann man als Quotient 538
  72·35            annehmen.
  63·32
   9·03
   8·14
     89
     81
      8
```

Beispiele.

1) 7856·4805 : 67·034

Man verlangt im Quotienten 3 Decimalen, mithin 6 Ziffern.

```
7856·4805 : 67·034 = 117·201
1153 08
 482 74
  13 50
   = 9
     2
```

Digitized by Google

2) 45367·0381 : 0·097458

Es wird bloß der Quotient in ganzen Zahlen verlangt.

45367·0381 : 0·097458 = 465503

638383
53635
4906
33
4

3) 0·07493 : 0·004856

Man wünscht bloß 2 Decimalstellen im Quotiente.

0·07493 : 0·004856 = 15·43

2637
209
15
1

4) 984357·098473 : 4389·723

Man will nur 3 Decimalen des Quotienten erfahren.

984357·098473 : 4389·723 = 224·241

106412
18618
1059
181
6
2

Fourier'sche Divisionsmethode.

Eine zweite Methode der abgekürzten Division rührt von dem französischen Mathematiker Fourier her; der Hauptgedanke derselben bestehet darin: bei der Division nur so viele Ziffern des Divisors in Anspruch zu nehmen, als eben zu jeder einzelnen Division nothwendig ist.

Zum klaren Verständniß der Sache wollen wir zuerst diejenige Multiplicationsweise zeigen, von der die Fourier'sche Divisionsmethode der entgegengesetzte Weg ist, indem wir dabei die früher erlangte Freiheit benützen, die Multiplication in jeder uns beliebigen Ordnung zu verrichten, wenn nur jede Ziffer des Productes an die ihrem Range gebührende Stelle gesetzet wird.

Multipliciren wir die Zahl 345607 mit 1289, wobei wir während der ganzen Multiplication die Ziffern 345 ungetrennt beisammen lassen, die übrigen Ziffern aber einzelnweise mit einander multipliciren und ihre Producte immer an die gehörige Stelle einreihen wollen.

Digitized by Google

Man hat somit:

	345.607		345.607
	1.289		1.289
	345,		345,607
	6		69,121.4
	69,0		27,648.56
1.0 + 2.6 =	12		3,110.463
345.8 =	27,60		445,487.423
1.7 + 2.0 + 8.6 =	55		
345.9 =	3,105		
2.7 + 8.0 + 9.6 =	6.8		
8.7 + 9.0 =	56		
7.9 =	63		
	445,487.423		

Ich multiplicire zuerst 345 Tausender mit 1 Tausend, setze das Product an die Stelle der Millionen; um nun die nächste Stelle der Hunderttausender zu besetzen, muß ich den Tausender 1 mit dem Hunderter 6 multipliciren, gibt mir 6, die ich an die Stelle der Hunderttausender schreibe; eben so gibt mir der Hunderter 2 mit dem Tausender 345 ebenfalls 690 Hunderttausende, die ich auch an die Stelle der Hunderttausender schreibe, so daß 0 an die der benannten Stelle 9 dadurch an die Stelle der Millioner, und somit 6 an die Stelle der Zehnmillioner kömmt. Die zunächst zu besetzende Stelle ist die der Zehntausender; zu diesem Behufe muß ich den Tausender 1 mit dem Zehner 0, den Hunderter 2 mit dem Hunderter 6 multipliciren, was mir: 1.0 + 6.2 = 12 Zehntausender gibt, die ich an ihre Stelle eintrage; eben so gibt mir 345 Tausender mit 8 Zehnern multiplicirt 2760 Zehntausender, die ich ebenfalls an ihren gehörigen Platz setze. Ich komme nun zu den Tausendern; ich erhalte die Tausender, wenn ich die Tausender mit den Einheiten, Hunderter mit Zehnern, Zehner mit Hundertern, Einheiten mit Tausendern multiplicire; ich habe somit: 1.7 + 2.0 + 8.6 = 55 Tausender und 9.345 = 3105 Tausender, die ich beide am gehörigen Orte anbringe. Für die Stelle der Hunderter habe ich Hunderter mit Einheiten, Zehner mit Zehnern, Einheiten mit Hundertern, d. i. 2.7 + 8.0 + 9.6 = 68 Hunderter; für die Stelle der Zehner, Zehner mit Einheiten, Einheiten mit Zehnern, d. i. 8.7 + 0.9 = 56 Zehner, endlich für die Einheiten, Einheiten mit Einheiten 7.9 = 63 Einheiten.

Addire ich die zusammengehörenden Posten alle zusammen, so erhalte ich zum Producte 445,487.423 gerade eben so, als wenn ich auf dem gewöhnlichen Wege die Multiplication verrichtet hätte.

Folgende Beispiele mögen die Art und Weise dieser Multiplication noch anschaulicher machen.

Digitized by Google

1)

```
                 7.890,135.245
                   123,456·789
 ------------------------------
 789.
     0
 157·8
       1
  23·67
        5
   3·156,,
       1,,4
     394,,5
          25
      47,,34
           40
       5,,523.
            6.0
          631.2
             80
           71·01
             100,
              12,0
               1,30
                 119.
                   8.5
                     76
                      45
 ------------------------------
 974.090,,762·123,428·305
```

1)	789	1.0 = 0
2)	1578	1.1 + 2.0 = 1
3)	2367	1.3 + 2.1 + 3.0 = 5
4)	3156	1.5 + 2.3 + 3.1 + 4.0 = 14
5)	3945	1.2 + 2.5 + 3.3 + 4.1 + 5.0 = 25
6)	4734	1.4 + 2.2 + 3.5 + 4.3 + 5.1 + 6.0 = 40
7)	5523	1.5 + 2.4 + 3.2 + 4.5 + 5.3 + 6.1 + 7.0 = 60
8)	6312	2.5 + 3.4 + 4.2 + 5.5 + 6.3 + 7.1 + 8.0 = 80
9)	7101	3.5 + 4.4 + 5.2 + 6.5 + 7.3 + 8.1 + 9.0 = 100
		4.5 + 5.4 + 6.2 + 7.5 + 8.3 + 9.1 = 120
		5.5 + 6.4 + 7.2 + 8.5 + 9.3 = 130
		6.5 + 7.4 + 8.2 + 9.5 = 119
		7.5 + 8.4 + 9.2 = 85
		8.5 + 9.4 = 76
		9.5 = 45

Digitized by Google

2)

```
                 7.890,135·245
                   123,456.789
 ------------------------------
 789.01
       3
 157.802
       1,,1
  23.670,,3
         21
   3.156,,04
          35
     394,,505
           5.4
      47,,340.6
             73
       5,,523.07
              92
         631.208
             11,1
          71.010,9
              1,30
                119
                 8.5
                  76
                   45
 ------------------------------
 974.090,,762.123,428·305
```

1)	78901	1.3 = 3
2)	157802	1.5 + 2.3 = 11
3)	236703	1.2 + 2.5 + 3.3 = 21
4)	315604	1.4 + 2.2 + 3.5 + 4.3 = 35
5)	394505	1·5 + 2.4 + 3.2 + 4.5 + 5.3 = 54
6)	473406	2.5 + 3.4 + 4.2 + 5.5 + 6.3 = 73
7)	552307	3.5 + 4.4 + 5.2 + 6.5 + 7.3 = 92
8)	631208	4.5 + 5.4 + 6.2 + 7.5 + 8.3 = 111
9)	710109	5.5 + 6.4 + 7.2 + 8.5 + 9.3 = 130
		6.5 + 7.4 + 8.2 + 9.5 = 119
		7.5 + 8.4 + 9.2 = 85
		8.5 + 9.4 = 76
		9.5 = 45

Digitized by Google

3)

7.890,135.245
123,456.789

789.013„5
2
157.802„70
8
23.670„405
1.9
3.156„054.0
30
394„506.75
41
47„340.810
5,2
5„523.094,5
63
631.210,80
74
71.011,215
8.5
76
45

974.090„762.123,428.305

1) 7899135 | 1.2 = 2
2) 15780270 | 1.4 + 2.2 = 8
3) 23670405 | 1.5 + 2.4 + 3.2 = 19
4) 31560540 | 2.5 + 3.4 + 4.2 = 30
5) 39450675 | 3.5 + 4.4 + 5.2 = 41
6) 47340810 | 4.5 + 5.4 + 6.2 = 52
7) 55230945 | 5.5 + 6.4 + 7.2 = 63
8) 63121080 | 6.5 + 7.4 + 8.2 = 74
9) 71011215 | 7.5 + 8.4 + 9.2 = 85
8.5 + 9.4 = 76
9.5 = 45

Der Anfänger wird recht gut thun, mehrere Beispiele der Multiplication auf die so eben gezeigte Weise und auf die gewöhnliche Art zu vollführen, um sich durch die Uebereinstimmung der Resultate von der Richtigkeit der Operation zu überzeugen.

Die Fourier'sche Divisionsmethode bestehet nun gerade im entgegengesetzten der so eben gezeigten Multiplicationsweise. Man streichet einige Ziffern des Divisors an, deren man sich zur eigentlichen Division bedient, und welche Fourier den designirten Divisor nennet; eben so viele Ziffern streichet man auch im Dividende an, nur in dem Falle, wenn die so angestrichene Zahl im Dividende kleiner wäre als die im Divisor, nimmt man um eine Ziffer mehr. Würde man nun

Digitized by Google

die Division bloß mit dem designirten Divisor verrichten, so würden außer der ersten Stelle des Quotienten alle nachfolgenden gefehlt und die Fehler im Verfolge der Arbeit nur anwachsen, weil die spätern Stellen des Divisors von Einfluß sind auf die späteren Stellen des Quotienten. Um nun diesem Uebelstande vorzubeugen, muß man diejenigen Stellen, welche man zur nächsten Division braucht, durch die nachfolgenden Stellen des Divisors corrigiren. Durch solche richtig angebrachte Correctionen bekommt man nach und nach jede einzelne Ziffer des Quotienten richtig, ohne daß man die Multiplication mit dem ganzen Divisor vorzunehmen braucht. Der in den vorhergehenden Beispielen angestrichene Theil des einen Factors stellt den angestrichenen Theil des Divisors vor; die aus den einzelnen Ziffern gebildeten Theilproducte sind die eben besprochenen Correcturen. Ein Beispiel wird uns die deutlichste Einsicht in den Gegenstand verschaffen; zu diesem Behufe wollen wir das erste Beispiel umkehren, und 445,487.423 durch 345.607 dividiren.

Streichen wir bei beiden die ersten drei Ziffern an:

$$\overline{445},487.423 : \overline{345}.607$$

nun gibt uns 445 dividirt durch 345 zum Quotienten 1; da aber 445 Millioner und 345 aber Tausender sind, und Millioner durch Tausender dividirt uns Tausender geben, so ist daher 1 ein Tausender, und ich habe:

$$\begin{array}{l} \overline{445},487.423 : \overline{345}.607 = 1\ldots \\ 345 \\ \hline 1004 \end{array}$$

Nachdem ich die 1 mit 345 multiplicirt und am gehörigen Orte subtrahirt habe, bleiben 1004 Hunderttausender; damit ich nun bei weiterer Division ein richtiges Resultat bekomme, muß die Stelle der Hunderttausender richtig gestellt werden. Der Einser des Quotienten als ein Tausender gibt mit der 6 des Divisors, die ein Hunderter ist, uns 6 Hunderttausender, die ich schon früher hätte wegnehmen sollen, die ich daher jetzt wegnehme; diese $6 \cdot 1 = 6$ ist nun die erste Correctur. Ich habe somit:

$$\begin{array}{l} \overline{445},487.423 : \overline{345}.607 = 12.. \\ 345 \\ \hline 1004 \\ \quad 6 \\ \hline 998 \\ 690 \\ \hline 3088 \end{array}$$

Es bleiben mir 998 Hunderttausender, welche ganz richtig sind; ich dividire 998 : 345 und erhalte 2 als die zweite Ziffer des Quotienten, multiplicire diese mit dem designirten Divisor, ziehe ab und erhalte 3088, nachdem die folgende 8 des Divisors noch herabgesetzt wurde;

Digitized by Google

diese 3088 sind Zehntausender; ehe ich nun weiter dividire, muß ich die Stelle der Zehntausender richtig stellen, also vom Reste alle Zehntausender wegnehmen, die aus den nicht angestrichenen Ziffern des Divisors entstehen können; 6 als Hunderter mit 2 als Hunderter gibt 12 Zehntausender, eben so 0 als Zehner mit 1 als Tausender gibt $1.0 = 0$ Zehntausender; ich habe also als Correctur: $6.2 + 1.0 = 12$; nehme ich diese von 3088 weg, so bleibt mir 3076; nachdem so diese Stelle in Ordnung ist, kann ich wieder durch 345 dividiren, und erhalte 8 als dritte Ziffer des Quotienten, der also 128 ist;

3088
12
3076
2760
3167

Nach gemachter Subtraction, und nachdem die 7 aus dem Dividende herabgesetzt wurden, erhalte ich 3167 Tausender. Um nun die Stelle der Tausender richtig zu stellen, muß ich alle Theilproducte aus den nicht angestrichenen Ziffern des Divisors und des Quotienten bilden, die uns Tausender geben.

Die 6 als Hunderter gibt mit 8 als Zehner 48 Tausender,
0 als Zehner » » 2 als Hunderter 0 »
7 als Einheiten » » 1 als Tausender 7 »

so also, daß unsere Correctur $6.8 + 0.2 + 7.1 = 55$ Tausender ist, und man somit nach gemachter Subtraction 3112 hat, und nun kann man, da diese Stellen richtig sind, mit dem designirten Divisor dividiren, wodurch man 9 als vierte Ziffer des Quotienten erhält, der somit 1289 ist; man hat so:

3167
55
3112
3105
74

wo wir hier schon 4 als die nächste Ziffer des Dividendus herabgesetzt haben; diese 74 sind also Hunderter. Um nun die Stelle der Hunderter in Ordnung zu bringen, müssen wir alle Theilproducte bilden aus den nicht angestrichenen Ziffern des Divisors und denen des Quotienten:

6 als Hunderter gibt mit 9 als Einheit 54 Hunderter,
0 als Zehner » » 8 als Zehner 0 »
7 als Einheiten » » 2 als Hunderter 14 »

somit hat man als Correctur: $6.9 + 0.8 + 7.2 = 68$.

Nehme ich die 68 von 74 weg, so bleiben 6 Hunderter übrig; dividire ich 6 durch 345, so erhalte ich 0 für die Stelle der Zehntel des Quotienten, weil Hunderter durch Tausender dividirt Zehntel geben; setze ich nun die nächste 2 des Dividends herab, so habe ich 62 Zehner; um nun die Zehner, die aus den nicht angestrichenen Ziffern des Divisors und Quotienten entstehen, zu bilden, so sehe ich, daß

Digitized by Google

6 als Hunderter mit 0 Zehnteln uns 0 Zehner
0 als Zehner mit 9 Einheiten uns 0 »
7 als Einheiten mit 8 Zehnern uns 56 »

geben, also Correctur = 6.0 + 0.9 + 7.8 = 56.

Nehme ich nun diese 56 von den 62 weg, so bleiben 6 Zehner; diese 6 Zehner durch 345 Tausender dividirt geben 0 Hundertel zum Quotienten; kommt nun 3 aus dem Dividende herab, so habe ich 63 Einheiten, und um die Stelle zu finden, die aus den nicht angestrichenen Theilen des Divisors und den Ziffern des Quotienten uns Einheiten geben, hat man:

6 als Hunderter mit 0 Hundertelu = 0 Einheiten
0 als Zehner mit 0 Zehnteln = 0 »
7 als Einheiten mit 9 Einheiten = 63 »

Zieht man nun diese 63 ab, so bleibt nichts übrig, als Beweis, daß die Division ohne Rest aufgehet.

Stellt man die ganze vorige Division zur besseren Uebersicht in einem Bilde auf, so hat man:

$$\overline{445,487.423} : \overline{345.607} = 1289{\cdot}000$$

345
100,4
6.1 = 6
99,8
2.345 = 69,0
30,88
6.2 + 0.1 = 12
30,76
8.345 = 27,60
3,167
6.8 + 2.0 + 7.1 = 55
3,112
9.345 = 3,105
74
6.9 + 0.8 + 7.2 = 68
62
6.0 + 0.9 + 7.8 = 56
63
6.0 + 0.0 + 7.9 = 63

Vergleicht man dieß mit dem ersten Beispiele, wo wir $\overline{345607}$ mit 1289 multiplicirt haben, so sieht man, daß so wie wir dort addirt hier dieselben Posten nach und nach vom Producte subtrahirt haben.

Eben so wollen wir das zweite Multiplicationsbeispiel umkehren, und haben:

Digitized by Google

$\overline{974}.090,,762.123,428.305 : \overline{7.890},135.245 =$
$123,456.789{\cdot}000000$

$\underline{789}$
1850
$\mathfrak{C}_1 = \underline{0}$
1850
$\underline{1578} = 2.789$
2729
$\mathfrak{C}_2 = \underline{1}$
2728
$\underline{2367} = 3.789$
3610
$\mathfrak{C}_3 = \underline{5}$
3605
$\underline{3156} = 4.789$
4497
$\mathfrak{C}_4 = \underline{14}$
4483
$\underline{3945} = 5.789$
5386
$\mathfrak{C}_5 = \underline{25}$
5361
$\underline{4734} = 6.789$
6272
$\mathfrak{C}_6 = \underline{40}$
6232
$\underline{5523} = 7.789$
7091
$\mathfrak{C}_7 = \underline{60}$
7031
$\underline{6312} = 8.789$
7192
$\mathfrak{C}_8 = \underline{80}$
7112
$\underline{7101} = 9.789$
113
$\mathfrak{C}_9 = \underline{100}$
134
$\mathfrak{C}_{10} = \underline{120}$
142
$\mathfrak{C}_{11} = \underline{130}$
128

Digitized by Google

$$
\begin{array}{rl}
 & 128 \\
\mathfrak{C}_{12} = & \underline{119} \\
 & 93 \\
\mathfrak{C}_{13} = & \underline{85} \\
 & 80 \\
\mathfrak{C}_{14} = & \underline{76} \\
 & 45 \\
\mathfrak{C}_{15} = & \underline{45} \\
 & \text{x x}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllllllll}
\mathfrak{C}_1 = & 0.1 & & & & & & & \\
\mathfrak{C}_2 = & 0.2 & + 1.1 & & & & & & \\
\mathfrak{C}_3 = & 0.3 & + 1.2 & + 3.1 & & & & & \\
\mathfrak{C}_4 = & 0.4 & + 1.3 & + 3.2 & + 5.1 & & & & \\
\mathfrak{C}_5 = & 0.5 & + 1.4 & + 3.3 & + 5.2 & + 2.1 & & & \\
\mathfrak{C}_6 = & 0.6 & + 1.5 & + 3.4 & + 5.3 & + 2.2 & + 4.1 & & \\
\mathfrak{C}_7 = & 0.7 & + 1.6 & + 3.5 & + 5.4 & + 2.3 & + 4.2 & + 5.1 & \\
\mathfrak{C}_8 = & 0.8 & + 1.7 & + 3.6 & + 5.5 & + 2.4 & + 4.3 & + 5.2 & \\
\mathfrak{C}_9 = & 0.9 & + 1.8 & + 3.7 & + 5.6 & + 2.5 & + 4.4 & + 5.3 & \\
\mathfrak{C}_{10} = & & 1.9 & + 3.8 & + 5.7 & + 2.6 & + 4.5 & + 5.4 & \\
\mathfrak{C}_{11} = & & & 3.9 & + 5.8 & + 2.7 & + 4.6 & + 5.5 & \\
\mathfrak{C}_{12} = & & & & 5.9 & + 2.8 & + 4.7 & + 5.6 & \\
\mathfrak{C}_{13} = & & & & & 2.9 & + 4.8 & + 5.7 & \\
\mathfrak{C}_{14} = & & & & & & 4.9 & + 5.8 & \\
\mathfrak{C}_{15} = & & & & & & & 5.9 &
\end{array}
$$

Zur Uebung möge der Anfänger dasselbe Beispiel wiederholen und dabei 78901, dann 7890135 anstreichen, wobei ihm das zweite und dritte Multiplicationsbeispiel als Anhalt dienen können. Wir wollen hier nur die Anmerkung anfügen, daß falls die Correctur größer ist als der Rest, von der sie weggenommen werden soll, so ist dieß ein Beweis, daß die letzte Ziffer im Divisor zu hoch genommen ward; man muß in einem solchen Falle diese Ziffer um eine Einheit vermindern, und deßwegen die letzte Operation wiederholen; auch wird man schon bei der Division Rücksicht auf die nächste Correctur nehmen, und falls man sieht, daß die nächste Correctur nicht genommen werden kann, so nimmt man gleich die Ziffer im Quotienten um 1 niedriger, wenn auch bei der Subtraction der Rest größer seyn sollte als der Divisor. Zur Erläuterung dessen mag gleich unser erstes Beispiel dienen; dividiren wir 445,487.423 durch 345.607, und streichen wir im Dividend und Divisor nur zwei Ziffern an, so hat man:

Digitized by Google

445,487.423 : 345.607 = 129

34
105
5
100
68
324
16
308
306
2

5.2 = 10
6.1 = 6
16

5.9 = 45
6.2 = 12
0.1 = 0
57

und hier ist die Correctur 57 größer als 2, von dem sie weggenommen werden soll; nachdem nun die Correctur weggenommen werden muß, wenn die Ziffern dieses Theils des Restes richtig seyn sollen, so muß, da 2 zu klein ist, 306 und daher auch 9 zu groß seyn; ich muß also statt 9 die Ziffer 8 nehmen und habe:

445,487.423 : 345.607 = 1289·000

324
16
308
272
368
52
316
306
107
100
74
68
62
56
63
63
0

5.8 = 40
6.2 = 12
0.1 = 0
52

5.9 = 45
6.8 = 48
0.2 = 0
7.1 = 7
100

5.0 = 0
6.9 = 54
0.8 = 0
7.2 = 14
68

5.0 = 0
6.0 = 0
0.9 = 0
7.8 = 56
56

5.0 = 0
6.0 = 0
0.0 = 0
7.9 = 63
63

derlei Rückgänge in der Rechnung sind öfters, wenn ich bloß eine Ziffer im Divisor anstreiche:

Digitized by Google

$\overline{445,487.423} : \overline{345.607} = 1289{\cdot}0000$

3			
14	4.2 = 8	4.8 = 32	4.9 = 36
4	5.1 = 5	5.2 = 10	5.8 = 40
10	13	6.1 = 6	6.2 = 12
6		48	0.1 = 0
45			88
13	4.0 = 0		4.0 = 0
32	5.9 = 45		5.0 = 0
24	6.8 = 48		6.9 = 54
84	0.2 = 0		0.8 = 0
48	7.1 = 7		7.2 = 14
36	100		68
27			
98	4.0 = 0		4.0 = 0
88	5.0 = 0		5.0 = 0
107	6.0 = 0		6.0 = 0
100	0.9 = 0		0.0 = 0
74	7.8 = 56		7.9 = 63
68	56		63
62			
56			
63			
63			
2			

hier muß ich sagen 3 in 10 gehet nicht 3mal, sondern 2mal, weil ich die Correctur nicht nehmen kann; aus demselben Grunde 3 in 32 nicht 9, sondern 8mal, 3 in 36 nicht 10, sondern 9mal, 3 in 10 nicht 3, sondern 0mal u. s. w. Man sieht daher bloß eine Ziffer im Divisor anstreichen — überhaupt zu wenig Ziffern anstreichen — würde wegen der immerwährenden Rückgänge die ganze Divisionsmethode unpraktisch machen, obwohl man auch hier bei gehöriger Achtsamkeit zum richtigen Resultate gelangt. In den meisten Fällen wird es am vortheilhaftesten seyn, zwei oder drei Ziffern anzustreichen. Es wird wohl auch hier manchmal ein Rückgang nothwendig seyn, allein dieß wird durch die übrige Leichtigkeit der Operation reichlich entschädiget.

Wenn die Division nicht aufgehet, so bleibt man entweder nach dem Bedürfniß der Rechnung bei irgend einer Ziffer stehen, oder wenn, wie dieß öfter der Fall ist, der Divisor aus unendlich vielen Ziffern bestehet, bis die letzte der gegebenen Ziffern des Divisors erschöpft ist.

Digitized by Google

Beiſpiel 1. 1 : 142857

1·00 : 142857 = 0·000007000007
98
20
14
60
56
40
35
50
49
10
0
100
0
100
98
2

u. ſ. w.

2.0 = 0
8.7 = 56
56

2.0 = 0
8.0 = 0
5.7 = 35
35

2.0 = 0
8.0 = 0
5.0 = 0
7.7 = 49
49

2.0 = 0
8.0 = 0
5.0 = 0
7.0 = 0
0

2.0 = 0
8.0 = 0
5.0 = 0
7.0 = 0
0

Digitized by Google

Beiſpiel 2. 2 : 1·4142136

2·0 : 1·4142136 = 1·414213

14
60
1
59
56
30
8
22
14
80
19
61
56
50
17
33
28
50
27
23
14
90
36
54
42
120

1.4 = 4
4.1 = 4
8

1.1 = 1
4.4 = 16
2.1 = 2
19

1.4 = 4
4.1 = 4
2.4 = 8
1.1 = 1
17

1.2 = 2
4.4 = 16
2.1 = 2
1.4 = 4
3.1 = 3
27

1.1 = 1
4.2 = 8
2.4 = 8
1.1 = 1
3.4 = 12
6.1 = 6
36

Hier muß die Diviſion ſtehen bleiben, weil zur nächſten Correctur man ſchon die achte Decimale des Diviſors in Anſpruch nehmen

Digitized by Google

müßte, die nicht mehr gegeben ist. Durch beiläufige Schätzung findet man sie 6.

Beispiel 8. $1 : 3{\cdot}141592653$

$1.000 : 3{\cdot}141592653 = 0{\cdot}31830988$

942
580
3
577
314
2630
16
2614
2512
1020
40
980
942
380
58
3220
107
3113
2826
2870
73
2797
2512
2850
121
2729
2512
217

$1.1 = 1$
$5.3 = 15$
16

$1.8 = 8$
$5.1 = 5$
$9.3 = 27$
40

$1.3 = 3$
$5.8 = 40$
$9.1 = 9$
$2.3 = 6$
58

$1.0 = 0$
$5.3 = 15$
$9.8 = 72$
$2.1 = 2$
$6.3 = 18$
107

$1.9 = 9$
$5.0 = 0$
$9.3 = 27$
$2.8 = 16$
$6.1 = 6$
$5.3 = 15$
73

$1.8 = 8$
$5.9 = 45$
$9.0 = 0$
$2.3 = 6$
$6.8 = 48$
$5.1 = 5$
$3.3 = 9$
121

Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche, und umgekehrt.

Die Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Decimalbruch besteht ganz einfach darin, daß ich den Zähler durch den Nenner dividire. Ist der Zähler kleiner als der Nenner, so bekomme ich erst in den Decimalstellen bedeutende Ziffern, z. B.: $^1/_2$ ist so viel, als $1:2$, statt 1 schreibe ich $1{\cdot}0$, d. i. so viel, als 10 Zehntel, und erhalte $1:2 = 0{\cdot}5$. Um $^3/_8$ in einen Decimalbruch zu verwandeln, habe ich 3 durch 8 zu dividiren, und verfahre folgendermaßen:

Digitized by Google

$$
\begin{array}{l}
3 : 8 = 0{\cdot}375 \\
30 \\
24 \\
\hline
60 \\
56 \\
\hline
40 \\
40 \\
\hline
0
\end{array}
$$

8 in 3 geht 0mal, daher 0 an die Stelle der Einheiten: ich verwandle 3 in Zehntel, gibt 30 Zehntel; 8 in 30 geht 3mal, es bleiben 6 Zehntel, die uns 60 Hundertel geben; 8 in 60 geht 7mal, es bleiben 4 Hundertel, die uns 40 Tausendtel geben; 40:8 gibt 5 Tausendtel.

In den seltensten Fällen geht aber die Division auf; in solchen Fällen nimmt man so viel Decimalstellen, als das Bedürfniß der Genauigkeit erfordert, und läßt die übrigen weg.

Z. B.: $^1/_7 = 0{\cdot}142857142857142857142857\ldots\ldots$

Man nimmt gewöhnlich $^1/_7 = 0{\cdot}142857$.

Eine solche Reihe von Ziffern 142857, die sich wie hier stets wiederholt, heißt eine Periode, und ein solcher Bruch ein periodischer Bruch. Man deutet sie gewöhnlich dadurch an, daß man die erste und letzte Ziffer der Periode oben punktirt, z. B.:

$$^1/_7 = 0{\cdot}\dot{1}42857\dot{}$$

Eben so ist: $^1/_3 = 0{\cdot}33333$ u. s. w., was man kurz $^1/_3 = 0{\cdot}\dot{3}$ schreibt.

$$\frac{31}{108} = 0{\cdot}287037037037\ldots$$

Hier fängt die Periode später an, man schreibt:

$$\frac{31}{108} = 0{\cdot}287\dot{0}37\dot{}.$$

Eben so hat man

$$
\begin{array}{l}
1 : 365 = 0{\cdot}00274 \\
1000 \\
730 \\
\hline
270 \\
256 \\
\hline
14 \\
14 \\
\hline
0
\end{array}
$$

Nachdem ich hier die 3te Stelle gefunden, kürze ich die Division ab, da ich nur 5 Decimalstellen haben will, und lasse somit eine Ziffer nach der andern im Divisor weg.

Wir wollen nun zur verkehrten Aufgabe übergehen, wie man einen Decimalbruch in einen gemeinen Bruch verwandelt; es sey der Bruch 0·375, so kann ich ihn 3 Zehntel, 7 Hundertel, 5 Tausendtel, oder 375 Tausendtel aussprechen; schreibe ich die letzte Aussprache, so habe ich:

$$0{\cdot}375 = \frac{375}{1000},$$

Digitized by Google

ich kann hier durch 5 3mal Zähler und Nenner abkürzen, wodurch ich $^3/_8$ erhalte, daher $0{\cdot}375 = {}^3/_8$, und die Aufgabe ist gelöset.

Es sey ferner 0·00369; spreche ich den Decimalbruch im Ganzen aus, so heißt er 369 Hunderttausendtel, daher

$$0{\cdot}00369 = \frac{369}{100000}.$$

Um also einen Decimalbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln, so braucht man ihn nur im Ganzen aus zusprechen, und die Aussprache niederzuschreiben. Oft läßt sich dann dieser Bruch abkürzen.

Will man schon durchaus eine mechanische Regel haben, so brauche ich nur beim Decimalbruche den Einheitspunkt und die müßigen Nullen vorn wegzulassen, den Rest als Zähler zu nehmen, und als Nenner darunter 1 mit so vielen Nullen zu schreiben, als Decimalstellen vorhanden sind.

$$0{\cdot}07005 = \frac{7005}{100000}; \quad 0{\cdot}0000057 = \frac{57}{10000000}.$$

Es gilt dieß auch, wenn eine ganze Zahl dabei ist:

$$7{\cdot}003 = \frac{7003}{1000}; \quad 56{\cdot}3012 = \frac{563012}{10000}.$$

Etwas schwieriger wird die Sache, wenn man einen periodischen Decimalbruch in einen gemeinen Bruch verwandeln soll, und man den Bruch ganz genau haben will. Z. B. 0·333333.. Setze ich dieß gleich $\frac{333333}{1000000}$, da es, wie wir aus dem Früheren wissen, eigentlich $^1/_3$ ist, so ist der Fehler

$$= \frac{1}{3} - \frac{333333}{1000000} = \frac{1{,}000.000 - 999999}{3000000} = \frac{1}{3{,}000.000}$$

also gewiß sehr klein; daher, wenn man die so eben entwickelte Methode auch auf periodische Brüche anwendet, mit Rücksicht auf den gehörigen Grad der Genauigkeit, man immer nur einen höchst unbedeutenden Fehler machen wird. Allein es ist doch in den meisten Fällen bequemer, einen kleinen Bruch $^1/_3$ als einen großen $\frac{333333}{1000000}$ zu haben.

Um nun den periodischen Bruch 0·3333.. in einen gemeinen Bruch zu verwandeln, multiplicire ich den Bruch mit 10, und habe: der 10fache Bruch ist gleich 3·3333.. Ziehe ich nur den einfachen Bruch von dem zehnfachen ab, so fallen im Reste die Decimalstellen weg, und ich habe: der 9fache Bruch ist gleich 3, also der einfache Bruch $= {}^3/_9 = {}^1/_3$.

Es sey ferner der Bruch $0{\cdot}\dot{7}2\dot{9}$ oder 0·729729729. Ich multiplicire hier den Bruch mit 1000, um eine ganze Periode vor den Einheitspunkt zu bringen, und habe

1000facher Bruch	=	729·729729 . . .
1facher Bruch	=	0·729729 . . .
bleibt 999facher Bruch	=	729
also Bruch	=	$\frac{729}{999} = \frac{81}{111} = \frac{27}{37}$.

Digitized by Google

Eben so $0\cdot\dot{1}42857\dot{} = 0\cdot142857142857\ldots$

Um hier eine ganze Periode vor den Einheitspunkt zu bringen, muß ich hier mit einer 1000000 multipliciren, und habe

1,000.000facher Bruch = 142857·142857....
1facher Bruch = 0·142857....

999·999facher Bruch = 142857

also Bruch $= \frac{142857}{999999}$,

kürze ich hier durch 3, 9, 11, 13, 37 ab, so erhält man den Bruch $= \frac{1}{7}$.

Als eine mechanische Regel läßt sich aus dem Vorhergehenden entnehmen: fängt die Periode gleich nach dem Einheitspunkte an, so ist der Zähler des Bruches gleich den Ziffern der Periode, der Nenner besteht aus so vielen Neunern als die Periode Ziffern hat, z. B.

$$0\cdot\dot{1}3\dot{5} = \frac{135}{999};\quad 0\cdot063063\ldots = \frac{63}{999} = \frac{7}{111}.$$

Fängt die Periode aber erst etwas später an, so multiplicirt man den Bruch zuerst mit einer solchen Zahl, daß die Nichtperiode (Reihe der Ziffern die der Periode vorangehen) und die ganze erste Periode vor das Einheitszeichen kommt, dann mit einer solchen Zahl, daß bloß die Nichtperiode vor das Einheitszeichen kommt, und zieht dann beide von einander ab, wodurch die Decimalstellen wegkommen; z. B. 0·287037037 man hat

1,000.000f. Bruch = 287037·037...
1.000f. Bruch = 287·037...

999,000f. Bruch = 286750

daher Bruch $= \frac{286750}{999000}$, der durch 250 u. 37 abgek. uns $\frac{31}{108}$ gibt.

Zweites Beispiel. 0·15333. Man hat

1000f. Bruch = 153·33...
100f. Bruch = 15·33...

900f. Bruch = 138

Bruch $= \frac{138}{900}$.

Drittes Beispiel. 0·7212121...

1000f. Bruch = 721·21....
10f. Bruch = 7·21....

990f. Bruch = 714

Bruch $= \frac{714}{990} = \frac{238}{330}$.

Als Regel läßt sich hier aufstellen: Man nehme die Nichtperiode und die erste Periode, ziehe davon die Nichtperiode ab, so ist dieß der Zähler; der Nenner besteht aus so viel Neunern als aus wie viel Ziffern die Periode, und so viel Nullen als die Nichtperiode Ziffern hat.

Digitized by Google

Besteht die Nichtperiode aus Nullen, so ist der Zähler: die Ziffern der Periode, der Nenner bleibt aber nach der so eben gegebenen Regel bestimmt.

Anwendung der Decimalbrüche.

Die Rechnung mit gemeinen Brüchen leidet an zwei Unbequemlichkeiten; erstens ist an einem gemeinen Bruche die eigentliche Größe desselben nicht augenblicklich zu erkennen, sage ich z. B. $^{29}/_{49}$, so habe ich, da der Nenner 49 zu groß ist, als daß ich mir gut ein 49tes vorstellen könnte, kein rechtes Bild dieses Bruches; verwandle ich aber $^{29}/_{49}$ in einen Decimalbruch $= 0{\cdot}5918$, so sehe ich gleich, daß er nahe an 0·6 ist, und die Größe dieses Bruches wird mir klar; eben so ist es oft bei zwei gemeinen Brüchen schwer zu entnehmen, welcher von ihnen der größere sey, es bedarf dieß einer eigentlichen Rechnung, z. B. die Brüche $^{13}/_{16}$ und $^{15}/_{17}$; um nun zu sehen, welcher von ihnen der größere ist, müßte ich sie erst auf gemeinschaftliche Benennung bringen; habe ich aber statt ihnen die ihnen gleichgeltenden Decimalbrüche

$$\frac{13}{16} = 0{\cdot}8125; \quad \frac{15}{17} = 0{\cdot}8823\ldots$$

so sehe ich augenblicklich, daß der zweite Bruch größer ist.

Die zweite, viel größere Unbequemlichkeit ist die, daß, wenn eine Rechnung in gemeinen Brüchen angelegt ist, im Verlaufe derselben die Brüche so anschwellen, und die Zähler und Nenner so große Zahlen werden, daß nicht nur die Rechnung sehr mühsam wird, sondern eben deßwegen Fehler fast unvermeidlich werden. Rechnet man hingegen in Decimalbrüchen, so kann man durch abgekürzte Multiplication und Division dem Ueberhandnehmen vielziffriger Zahlen stets vorbeugen, und ist auch immer im Stande, weil man jedem Decimalbruche seine eigentliche Größe ansieht, die Vernachläßigungen so zu treffen, daß dem Resultate in denjenigen Stellen, die man genau haben will, kein Abbruch geschehe.

Im gemeinen Leben werden gewisse Bruchtheile mit eigenen Namen benannt, so daß man ihnen in der Rechnung die Bruchform erst wieder geben muß. So sagt man statt $^1/_{60}$ fl. ein Kreuzer, statt $^{17}/_{60}$ fl. 17 Kreuzer; statt $^1/_{32}$ Pfund ein Loth, statt $^1/_{40}$ Eimer eine Maß. Wir wollen uns nun damit beschäftigen, wie solche benannte Zahlen in Decimalbrüche, und umgekehrt verwandelt werden. Die klare Auflösung dieser Aufgabe besteht darin, daß man die benannte Zahl als gemeinen Bruch ihrer höheren Einheit ausdrückt, und diesen Bruch in einen Decimalbruch verwandelt.

$$\text{Z. B.} \quad 15\text{ kr.} = \frac{15}{60}\text{ fl.} = \frac{1}{4}\text{ fl.} = 0{\cdot}25\text{ fl.}$$

$$47\text{ kr.} = \frac{47}{60}\text{ fl.} = 0{\cdot}783\dot{3}\text{ fl.}$$

Digitized by Google

3 Pfennige $= \frac{3}{4}$ kr. $= \frac{3}{240}$ fl. $=$ 0·0125 fl.

3 Loth $= \frac{3}{32}$ Pfund $=$ 0·09375 Pfund $=$ 0·0009375 Zentner.

7 Maß $= \frac{7}{40}$ Eimer $=$ 0·175 Eimer.

Beim Anschreiben der Rechnung lassen sich einzelne Vortheile anwenden.

1. Man ziehe einen aufrechtstehenden Strich, und setze die Zahlen so rechts unter einander, daß die von der niedrigsten Benennung zuerst, darunter die von der nächst höheren u. s. w. zu stehen kommen.
2. Links setze man neben jede Zahl eine solche, womit man dividiren muß, um Einheiten der nächst höheren Ordnung zu erhalten.
3. Man fange die Division von der niedrigsten Benennung an, und hänge den Quotienten als Decimalbruch an die darunter stehende Zahl an.
4. Nun dividire man die um den Bruch vergrößerte Zahl durch die links stehende Zahl, und hänge wieder den Quotienten an die darunter stehende Zahl; so geht man bis zur gesuchten Benennung fort.

Beispiel 1. Es soll 1 fl. 15 kr. $2^3/_5$ Pfennige in einen Gulden-Decimalbruch verwandelt werden.

Im Anfange steht die Rechnung so:

5	3
4	2
60	15
	1

Nach gemachter Rechnung hat man:

5	3
4	2·6 Pfennige
60	15·65 Kreuzer
	1·26083 fl.

Daher 1 fl. 15 kr. $2^3/_5$ Pf. $=$ 1·26083 fl.

Beispiel 2. 37 Pfund 29 Loth 3 Quintel sollen in Zentner verwandelt werden.

Anfang.		Ende.	
4	3	4	3 Quintel
32	29	32	29·75 Loth
100	37	100	37·9296875 Pfund
			0·379297 Zentner

Also 37 Pfund 29 Loth 3 Quintel $=$ 0·379297 Zentner.

Beispiel 3. Wie viel machen 1 Loth $2^2/_5$ Quintel in Zentner aus?

Digitized by Google

Anfang.		Ende.	
5	2	5	2
4	2	4	2·4 Quintel
32	1	32	1·6 Loth
100	0	100	0·05 Pfund
			0·0005 Zentner.

Beispiel 4. 23 Jahre 2 Tage 35 Minuten sollen auf die Benennung Jahre gebracht werden.

Anfang.		Ende.		
60	35	60	35	Minuten.
24	0	24 = 8.3	0·583	Stunden
30	2		0·072916	
12	0	30	2·024305	Tage
	23	12 = 4.3	0·067476	Monate
			0·016869	
			23·005623	Jahre.

Die umgekehrte Aufgabe ist ganz einfach. Es seyen 9·755 fl., wie viel macht dieß in Gulden, Kreuzer und Pfennigen? Ich nehme den Bruch 0·755 fl.; um ihn in Kreuzer zu verwandeln, multiplicire ich mit 60 und habe 0·755 fl. = 0·755 × 60 kr. = 45·3 kr., ich nehme wieder die 0·3 kr. = 0·3 × 4 Pf. = 1·2 Pf., daher 9·755 fl. = 9 fl. 45 kr. $1^1/_5$ Pf.

2) Eben so 3·45675 Zentner sind gleich 3·45675 × 100 Pfund = 345·675 Pfd., ich nehme 0·675 Pfd., sie sind gleich 0·675 × 32 Loth = 21·6 Loth; 0·6 Loth = 0·6 × 4 Quintel = 2·4 = $2^4/_{10}$ = $2^2/_5$ Quintel, also 3·45675 Zentner = 3 Zentner 45 Pfund 21 Loth $2^2/_5$ Quintel.

3) 0·12345 Jahre = 0·12345 × 12 Monate = 1·4814 Monate, aber 0·4814 Monate = 0·4814 × 30 Tage = 14·442 Tage, daher 0·12345 Jahre = 1 Monat 14·442 Tage.

Kommen derlei Verwandlungen oft hinter einander vor, so trägt die Anwendung von Tabellen, wie sie unter **A.** bis **E.** hier vorkommen, sehr viel zur Bequemlichkeit und Sicherstellung der Rechnung bei.

Die Tabelle **A.** gibt die Verwandlung von Kreuzern und Pfennigen in Gulden-Decimalbrüche und umgekehrt an.

Sind Kreuzer und Pfennige gegeben, so suche man zuerst die erstern auf unter der Rubrik kr.; so ist die erste Decimalziffer diejenige, die ober der Rubrik stehet, in welcher man die gegebene Zahl der Kreuzer gefunden hat, die übrigen Decimalziffern, d. i. die 2te, 3te u. s. w. Ziffer findet man, wenn man in derselben Horizontalspalte, wo man die Zahl der Kreuzer gefunden hat, die gegebene Zahl der Pfennige suchet, neben welcher man dann die folgenden Ziffern findet.

Z. B. 1) 35 kr. 3 Pf. Man findet die 35 in der ersten Horizontalspalte, über der 35 findet man 0·5; in der Horizontalspalte, wo

35 ist, findet man bei 3 Pf. die Zahl 9583̇, daher hat man

35 kr. 3 Pf. = 0·59583̇.

Eben so ist

35 kr. 2 Pf. = 0·5916̇ fl.; 35 kr. 1 Pf. = 0·5875 fl.; 35 kr. = 0·583̇ fl.

2) 20 kr. 1 Pf. Man findet oberhalb 20 kr. die Zahl 0·3; in derselben Horizontalspalte, wo die 20 kr. stehen, findet man bei 1 Pf. 375, daher 20 kr. 1 Pf. = 0·3375 fl.

3) 3 Pf. suche ich in der Horizontalspalte, wo 0 Kreuzer vorkommt, und finde dabei 125, daher

3 Pf. = 0·0125 fl.; 2 Pf. = 0·008̇3̇ fl.; 1 Pf. = 0·0041̇6̇ fl.

Für die umgekehrte Aufgabe, wenn der Gulden-Decimalbruch gegeben ist, und man will ihn in Kreuzer und Pfennige verwandeln, suchet man die erste der gegebenen Decimalziffern oben auf in unserer Tabelle, die nachfolgenden Ziffern vergleicht man mit denjenigen Zahlen, die in unserer Tabelle in der letzten vertikalen Seite stehen, indem man dabei abwechselnd von unten nach aufwärts aufsteigt; die auf diese Art gefundene zunächst kleinere Zahl gibt die Horizontalspalte an, während die erste gegebene Decimalziffer die Vertikalspalte bezeichnet.

Z. B. 1) 0·98765 fl. — Unter der Rubrik 0·9 findet man 59, 58, 57, 56, 55, 54 Kreuzer; da aber die folgenden Decimalen 8765 sind, so ist 875 die zunächst kleinere Zahl, daher muß man 59 kr. und 1 Pf. nehmen; 59 kr. 1 Pf. sind gleich 0·9875 fl., was nun um 0·00015 fl. kleiner ist als 0·98765 fl., daher hat man

0·98765 fl. = 59 kr. 1 Pf. und 0·00015 fl.;

diesen letzten kleinen Bruch vernachläßiget man.

2) 0·5375 fl. — Unter 0·5 findet man 30, 31, 32, 33, 34, 35 Kreuzer, 375 hingegen findet man in der Horizontalspalte, wo 32 kr. stehen, und zwar bei 1 Pf., daher

0·5375 fl. = 32 kr. 1 Pf.

Bei manchen Rechnungen gehet man bis auf $\frac{1}{4}$ Pf.; für diese Fälle geben wir noch

$\frac{1}{4}$ Pf. = 0·0010416̇ fl.

$\frac{2}{4}$ Pf. = 0·0020833̇ fl.

$\frac{3}{4}$ Pf. = 0·003125 fl.

Beispiel 1. Es seyen 17 fl. 27 kr. $3\frac{1}{4}$ Pf., so hat man nach unserer Tabelle 27 kr. 3 Pf. = 0·4625 fl.

17
0·4625
0·003125

daher 17 fl. 27 kr. $3\frac{1}{4}$ Pf. = 17·465625 fl.

Beispiel 2. Es seyen 0·34567 fl. in Kreuzer, Pfennige und Viertel von Pfennigen zu verwandeln; die nächst kleinere Zahl unserer Tabelle 0·341$\dot{6}$ gibt 20 kr. 2 Pf.

0·34567
0·341666
0·004004
0·003125
0·000879

Es ist also 0·34567 fl. = 20 kr. $2\frac{1}{4}$ Pf. und etwas, was nicht ganz $\frac{1}{4}$ Pf. gleich ist.

Die Tafel **B.** gibt die Tage (360 auf 1 Jahr) in Decimaltheilen des Jahres, die Tafel **C.** Monate in Decimaltheilen des Jahres, und zugleich Zolle als Decimaltheile von Schuhen, die Tafel **D.** Zolle als Decimaltheile der Klafter. Die Einrichtung dieser Tafeln ist so einfach, daß dieselben keiner Erklärung bedürfen. Die Tafel **E.** ist ganz auf ähnliche Art eingerichtet wie die Tafel **A.**

Digitized by Google

Tafel A.

Kreuzer und Pfennige in Gulden-Decimalbrüchen ausgedrückt.

·9	·8	·7	·6	·5	·4	·3	·2	·1	·0		
fr.	fr.	fr.	fr.	fr.	fr.	fr.	fr.	fr.	fr.	Dnr.	
59	53	47	41	35	29	23	17	11	5	3	9583
										2	916
										1	875
										0	83
58	52	46	40	34	28	22	16	10	4	3	7916
										2	75
										1	7083
										0	6
57	51	45	39	33	27	21	15	9	3	3	625
										2	583
										1	5416
										0	5
56	50	44	38	32	26	20	14	8	2	3	4583
										2	416
										1	375
										0	3
55	49	43	37	31	25	19	13	7	1	3	2916
										2	25
										1	2083
										0	16
54	48	42	36	30	24	18	12	6	0	3	125
										2	083
										1	0416
										0	0

Anmerkung. Die in der obersten Reihe stehenden Ziffern sind die Zehntel der Decimalbrüche; die Ziffern in der letzten Kolumne rechts die übrigen Decimalstellen. Der Punkt auf der Ziffer zeigt die Wiederholung derselben an.

Z. B. 37 kr. 2 Dnr. = ·625 fl. 24 kr. 1 Dnr. = ·40416 fl.

Digitized by Google

Tafel B.

Tage in Decimaltheilen des Jahres.

Tage.	Decimaltheile des Jahres.	Tage.	Decimaltheile des Jahres.	Tage.	Decimaltheile des Jahres.
1	0·00277	11	0·03055	21	0·05833
2	0·00555	12	0·03333	22	0·06111
3	0·00833	13	0·03611	23	0·06388
4	0·01111	14	0·03888	24	0·06666
5	0·01388	15	0·04166	25	0·06944
6	0·01666	16	0·04444	26	0·07222
7	0·01944	17	0·04722	27	0·075
8	0·02222	18	0·05	28	0·07777
9	0·025	19	0·05277	29	0·08055
10	0·02777	20	0·05555		

Tafel C.

Monate in Decimaltheilen des Jahres.
Zolle in Decimaltheilen des Schuhes.

Monat Zoll.	Jahr Schuh.	Monat Zoll.	Jahr Schuh.	Monat Zoll.	Jahr Schuh.
1	0·0833	5	0·4166	9	0·75
2	0·1666	6	0·5	10	0·8333
3	0·25	7	0·5833	11	0·9166
4	0·3333	8	0·6666		

Um Schuhe in Klafter zu verwandeln, nimmt man den Decimalbruch aus dieser Tafel für die doppelte Zahl, z. B. 5′ = 0·833 Klafter; 2′ = 0·333 Klafter.

Digitized by Google

Tafel D.

Zolle in Decimaltheilen der Klafter.

Zoll.	Klafter.	Zoll.	Klafter.	Zoll.	Klafter.
1	0·01388	5	0·06944	9	0·125
2	0·02777	6	0·08333	10	9·13888
3	0·04166	7	0·09722	11	0·15277
4	0·05555	8	0·11111		

1. Es seyen z. B. 7·346 Klafter, so hat man
333 = 2 Schuh
0·013 = nahe 1 Zoll, daher
7·346 Klafter 7° 2′ 1″.

2. Umgekehrt, 5° 2′ 7″ sollen in Decimaltheile der Klafter verwandelt werden:

5° = 5°
2′ = 0·3333
7″ = 0°·0972
5° 2′ 7″ = 5°·4305

3. 3 Jahre 4 Monate 5 Tage in Decimaltheile des Jahres verwandeln:

3 Jahre = 3·....
4 Monate = 0·33333
5 Tage = 0·01388
3·34722 Jahre.

4. 0·5678 Jahre in Monate und Tage verwandeln.

0·5678
0·5 = 6 Monate
0·0678
0·0638 = 23 Tage. Antwort 6 Monat 23 Tage.

5. 5·4321 fl. in fl., kr. und dl. verwandeln:

0·4321
0·4292 = 25 kr. 3 dl. Antwort 5 fl. 25 kr. 3 dl.

6. 8·9876 Pfund in Loth und Quintel (siehe die folgende Tabelle).

0·9876
0·9844 = 31 Lth. 2 Qtl. Antwort 8 Pfd. 31 Lth. 2 Qtl.

Digitized by Google

Tafel E.

Loth und Quintel in Pfund-Decimalbrüche verwandelt.

Loth.	Quintel. 3	Quintel. 2	Quintel. 1	Quintel. 0	
31	·9921875	·984375	·9765625	·96875	Die dritte, vierte und die folgenden Decimalstellen der ersten Zeile gelten auch für die folgenden drei Zahlen in demselben Viereck.
23	·74	·73	·72	·71	
15	·49·	·48	·47	·46	
7	·24	·23	·22	·21	
30	·9609375	·953125	·9453125	·9375	
22	·71	·70	·69	·68	
14	·46	·45	·44	·43	
6	·21	·20	·19	·18	
29	·9296875	·921875	·9140625	·90625	
21	·67	·67	·66	·65	
13	·42	·42	·41	·40	
5	·17	·17	·16	·15	
28	·8984375	·890625	·8828125	·875	
20	·64	·64	·63	·62	
12	·39	·39	·38	·37	
4	·14	·14	·13	·12	
27	·8671875	·859375	·8515625	·84375	
19	·61	·60	·60	·59	
11	·36	·35	·35	·34	
3	·11	·10	·10	·09	
26	·8359375	·828125	·8203125	·8125	
18	·58	·57	·57	·56	
10	·33	·32	·32	·31	
2	·08	·07	·07	·06	
25	·8046875	·796875	·7890625	·78125	
17	·55	·54	·53	·53	
9	·30	·29	·28	·28	
1	·05	·04	·03	·03	
24	·7734375	·765625	·7578125	·75	
16	·52	·51	·50	·50	
8	·27	·26	·25	·25	
0	·02	·01	·00	·00	

Beispiele. 19 Lth. 2 Qtl. = ·609375 Pf.; 21 Pf. 17 Lth. 1 Qtl. = 21·5390625 Pf.; 1 Lth. 1 Qtl. = ·0390625; 79 Pf. 27 Lth. 1 Qtl. = 79·8515625 Pf. = ·798515625 Ztr.

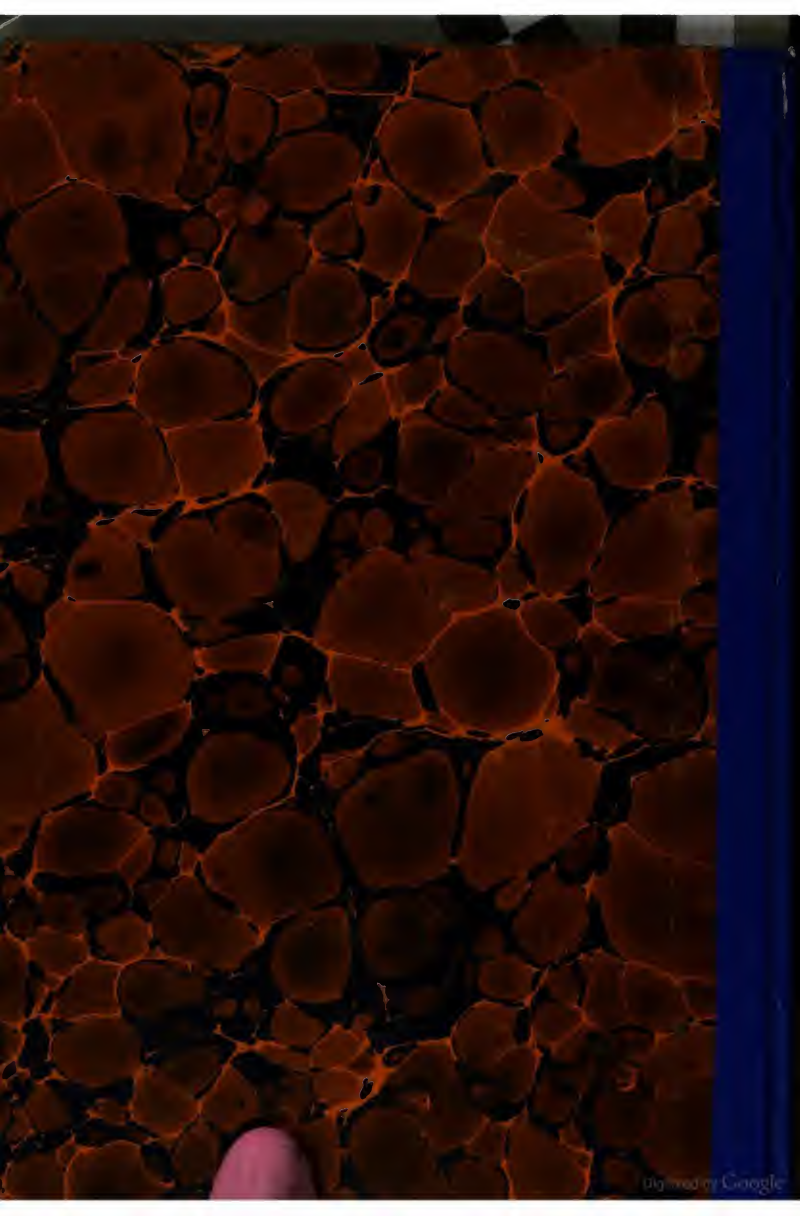
Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Österreichische Nationalbibliothek
+Z16

Digitized by Google


Digitized by Google